Corrigé de l'exercice sur la croissance de la population donné en classe

Année	Popul. monde	Augm. en 5 ans facteur	Augm. en 5 ans pourcent.	Augm. moy, en 1 an facteur	Augm. moy, en 1 an pourcent.	Durée de doublement
1950	2.52					
1955	2.77	1.0992	9.92%	1.0191	1.91%	36.6
1960	3.02	1.0903	9.03%	1.0174	1.74%	40.1
1965	3.34	1.1060	10.60%	1.0203	2.03%	34.4
1970	3.7	1.1078	10.78%	1.0207	2.07%	33.9
1975	4.07	1.1000	10.00%	1.0192	1.92%	36.4
1980	4.44	1.0909	9.09%	1.0176	1.76%	39.8
1985	4.84	1.0901	9.01%	1.0174	1.74%	40.2
1990	5.28	1.0909	9.09%	1.0176	1.76%	39.8
1995	5.69	1.0777	7.77%	1.0151	1.51%	46.3
2000	6.09	1.0703	7.03%	1.0137	1.37%	51.0
2005	6.46	1.0608	6.08%	1.0119	1.19%	58.8

exemple de calcul pour la tranche 2000 à 2005 :

Facteur multiplicatif pour 5 ans : $\frac{6.46}{6.09} \cong 1{,}0608$

" 1 an : $\left(\frac{6.46}{6.09}\right)^{\frac{1}{5}} \cong 1{,}01187 \cong 1{,}0119$

(augmentation de 1,19% par an

Combien d'années pour doubler ?

$1{,}0119^x = 2 \qquad x = \frac{\log(2)}{\log(1{,}0119)} \cong 58{,}8$

1. a) Comme $16 = 2^4$

L'éq. devient $2^{2x+1} = 2^4$, $\Leftrightarrow 2x+1=4$, $\Leftrightarrow \underline{x = 1{,}5}$

vérif: $2^{2\cdot 1{,}5+1} = 2^4 = 16$

(on trouve aussi en calculant $2x+1 = \frac{\log(16)}{\log(2)} = 4$ ...)

b) l'équation peut s'écrire:

$(2^2)^{2x+5} = 2^5$, $\Leftrightarrow 2^{4x+10} = 2^5$, $\Leftrightarrow 4x+10=5$, $\Leftrightarrow x = -1{,}25$

Verif: $4^{2\cdot(-1{,}25)+5} = 4^{2{,}5} = 32$

(on trouve aussi en calculant $2x+5 = \frac{\log(32)}{\log(4)} = 2{,}5$ ...)

c) $9^{2x+1} = 27^{3x} \Leftrightarrow (3^2)^{2x+1} = (3^3)^{3x} \Leftrightarrow 3^{4x+2} = 3^{9x}$

$\Leftrightarrow 4x+2 = 9x \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{2}{5} = 0{,}4}$

Vérif: $9^{2\cdot 0{,}4+1} = 9^{1{,}8} \cong 19{,}1959$; $27^{3\cdot 0{,}4} = 27^{1{,}2} \cong 52{,}1959$

On peut aussi écrire, en prenant le log:

$(2x+1)\log(9) = 3x \cdot \log(27)$

$2\cdot\log(9)\cdot x + \log(9) = 3\cdot\log(27)\cdot x$

$[2\cdot\log(9) - 3\cdot\log(27)]\,x = -\log(9)$

$x = \frac{-\log(9)}{2\log(9) - 3\log(27)} = \boxed{0{,}4}$ c'est bien plus long!

d) $2^{2x}\cdot 4^{x+1} = 16 \Leftrightarrow 2^{2x}\cdot(2^2)^{(x+1)} = 2^4$

$\Leftrightarrow 2^{2x}\cdot 2^{2x+2} = 2^4 \Leftrightarrow 2^{4x+2} = 2^4$

$\Leftrightarrow 4x+2 = 4 \Leftrightarrow \boxed{x = 0{,}5}$

Vérif.: $2^{2\cdot 0{,}5}\cdot 4^{0{,}5+1} = 2^1\cdot 4^{1{,}5} = 2\cdot 8 = 16$

e) $2^{3x+1}\cdot 5^{3x-1} = 2^{3x}\cdot 2^1\cdot 5^{3x}\cdot 5^{-1}$

$= (2^{3x}\cdot 5^{3x})\cdot\frac{2}{5} = (2\cdot 5)^{3x}\cdot\frac{2}{5}$

$= 10^{3x}\cdot 0{,}4$

L'éq. devient: $10^{3x}\cdot 0{,}4 = 400$

$10^{3x} = 1000 = 10^3$

D'où $3x = 3$, donc $\boxed{x=1}$

2. a) Augmentation de 3% $\rightarrow$ facteur multiplicatif $= 1{,}03$

$1{,}03^x = 10 \iff x \cdot \log(1{,}03) = \log(10)$

$\iff x = \dfrac{\log(10)}{\log(1{,}03)} \cong \underline{\underline{77{,}9}}$

$\Rightarrow$ elle est multiplié par 10 en environ 78 ans

b) Le facteur multiplicatif sur 10 ans est de 3

pour une année c'est donc $\sqrt[10]{3} = 3^{1/10} \cong 1{,}1612$

$\Rightarrow$ augmentation annuelle de $\underline{\underline{16{,}12\%}}$

c) 1 million $\xrightarrow[\cdot 1000]{}$ 1 milliard

Facteur multiplicatif pour 1000 ans $= 1000$

pour 1 an $= \sqrt[1000]{1000} = 1000^{0{,}001} = 1{,}00693$

Augmentation annuelle de 0,693 %

3. $\log(400) + 2\log(5) - 3\log(10) =$

$\log(400) + \log(5^2) - \log(10^3) = \log\left(\dfrac{400 \cdot 5^2}{10^3}\right)$

$= \log\left(\dfrac{400 \cdot 25}{1000}\right) = \log\left(\dfrac{4 \cdot 25}{10}\right) = \log(10) = 1$

4. a) $5^x = 1000 \iff x \cdot \log(5) = \log(1000) \iff x = \dfrac{\log(1000)}{\log(5)} \cong \underline{\underline{4{,}292}}$

b) $1{,}03^{3x+1} = 2^{x-1}$

$(3x+1)\log(1{,}03) = (x-1)\log(2)$

$3 \cdot \log(1{,}03) \cdot x + \log(1{,}03) = \log(2) \cdot x - \log(2)$

$[3\log(1{,}03) - \log(2)]\, x = -\log(2) - \log(1{,}03)$

$x = \dfrac{-\log(2) - \log(1{,}03)}{3\log(1{,}03) - \log(2)} \cong \underline{\underline{1{,}1956}}$

c) $16^{x^2-1} = 512$ $\qquad x^2 - 1 = \dfrac{\log(512)}{\log(16)} = 2{,}25$

$x^2 = 3{,}25$

$x = \pm\sqrt{3{,}25} \cong \pm 1{,}803$

d) <u>Erreur de données</u> ! Il manque le x

L'équation aurait dû être :

$4 \cdot e^{1,5x} = 3$, $\Leftrightarrow$ $e^{1,5x} = 0,75$

Prendre le <u>ln</u>, car $\ln(e^{\star}) = \star$

on a donc $1,5x = \ln(0,75)$; $\Leftrightarrow x = \dfrac{\ln(0,75)}{1,5}$

5. a) $\log(3x-1) = 2 \Leftrightarrow 3x-1 = 10^2 \Leftrightarrow 3x = 101$

$x = \frac{101}{3}$

$10^{\star}$ est l'opération inverse du log

b) $\ln(2x+1) = 10 \Leftrightarrow 2x+1 = e^{10} \Leftrightarrow x = \dfrac{e^{10}-1}{2} \cong 11013$

exp = opération inverse de ln

c) $\log(3x-1) = 1,12 \Leftrightarrow 3x-1 = 10^{1,12} \Leftrightarrow x = \dfrac{10^{1,12}+1}{3}$

$\cong 4,728$

6. $\log_2(1024) = 10$ car $1024 = 2^{10}$

(sinon, calculer $\dfrac{\log(1024)}{\log(2)} = 10$)

$\log_3(6) = \dfrac{\log(6)}{\log(3)} \cong 1,63$

$\log_6(3) = \dfrac{\log(3)}{\log(6)} \cong 0,613$

on peut tout aussi bien prendre les ln