Zéro puissance zéro

$0^0 = 1$

Contrairement à ce qu'on trouve dans certains ouvrages, **il existe une définition parfaitement naturelle et cohérente de 0^0**.

Définitions ensemblistes des opérations arithmétiques (opérations dans $\mathbb{N}$)

A partir des définitions ensemblistes élémentaires des fonctions arithmétiques, on montre facilement que $0^0 = 1$.

a) L'addition correspond à la réunion disjointe de deux ensembles («#» signifie «cardinal de»).
   #A + #B = #(A∪B) si A∩B = ∅
b) La multiplication correspond au cardinal de l'ensemble produit.
   #A • #B = #(A×B)
c) L'exponentiation correspond au cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble vers un autre :
   $\#B^{\#A}$ = #{f | f est une application de A vers B} *[voir page suivante]*

– Cette dernière définition donne bien $0^n = 0$ pour $n > 0$ et $n^0 = 1$ pour tout n entier, y compris n=0. En effet, si A = ∅ et B ≠ ∅, il est impossible de définir une application de B vers A, car tout point de B doit avoir exactement une image, et on ne peut pas en trouver dans A.
– Par contre, si B = ∅ – et quel que soit A – l'ensemble vide ∅, unique partie de A×B = ∅, est bien le graphe d'une application de B vers A. L'impossibilité d'avoir une image pour un point de B disparaît en effet dans le cas où B = ∅, puisqu'il n'y a pas de point pour lequel il faut définir une image.

Compter les mots (analogue plus intuitif de l'argument ensembliste)

On peut rendre ce dernier raisonnement plus intuitif en utilisant un modèle équivalent, celui de la construction de mots de longueur finie avec un alphabet fini. Ce modèle est équivalent à la définition ensembliste, un mot étant défini comme une suite finie de lettres, donc une application de {1, 2... n} vers un alphabet qui est aussi un ensemble fini (par exemple {a, b, c}).

C'est ainsi que 3^5 est le nombre de mots de 5 lettres qu'on peut construire avec un alphabet de 3 lettres : #{aaaaa, aaaab, aaaac, aaaba, aaabb, aaabc, aaaca, ... cccca, ccccb, ccccd} = 3^5.

Pour voir ce qui se passe si l'un des termes est nul, écrivons les mots entre parenthèses, ce qui nous permet d'écrire le mot vide (). Avec notre alphabet de 3 lettres, on voit bien qu'il y a 1 mot vide, 3 mots d'une lettre, 9 mots de 2 lettres, ... 3^k mots de k lettres. On retrouve donc la règle que $n^0 = 1$.

Si l'alphabet lui-même est vide, on ne peut pas construire de mots de longueur strictement positive, puisqu'on n'a aucune lettre à disposition. On retrouve ainsi que $0^n = 0$ pour $n > 0$.

Par contre, l'unique et providentiel mot vide peut s'écrire avec n'importe quel alphabet, même vide. On n'a pas de lettres à disposition, mais puisqu'on n'en a aucune à placer, le handicap disparaît comme par enchantement... ce qui donne à nouveau $0^0 = 1$.

Formules algébriques (argument pour poser $x^0 = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$)

On ne peut pas justifier de manière directe la formule $0^0 = 1$ par un simple jeu d'écriture avec les formules $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ et $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$ comme on peut le faire pour n^0 avec n>0. Il est également impossible de passer par les réels et d'utiliser la continuité.

a) On peut par contre trouver une formule arithmétique un peu plus complexe qui exige de poser $0^0 = 1$ pour rester valable dans tous les cas, à partir du binôme de Newton.
   Pour écrire la formule générale du binôme de Newton dans toute sa généralité, on doit écrire

   $$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_i^n a^i b^{n-i}$$, ce qui donne des exposants nuls aux extrémités

   Pour n=3, par exemple, cela donne $(a+b)^3 = a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + a^0b^3$, avec des exposants nuls aux extrémités.Supposons maintenant que $b = 0$. On a alors $b^1 = b^2 = b^3 = 0$. Il reste donc $(a+0)^3 = a^3 \cdot 0^0 + 0 + 0 + 0$, donc $a^3 = a^3 \cdot 0^0$, égalité qui exige que $0^0 = 1$ pour être vérifée pour tout a. On vérifie facilement que la formule du binôme telle qu'exprimée ci-dessus est bien valable pour toutes les valeurs réelles de a et b et pour tout n entier positif à condition de poser $0^0 = 1$.
   D'ailleurs, en la prolongeant à n=0, on aurait $(a+b)^0 = a^0b^0 = 1$, ce qui redonnerait encore $0^0 = 1$ dans le cas où a = 1 et b = –1.
b) Si on écrit la formule générale d'un polynôme sous la forme

   $$P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X^1 + a_0X^0 = \sum_{i=0}^{n} a_iX^i$$, le terme constant est a_0X^0

   Pour que la formule donne la valeur du polynôme en X=0, soit $P(0) = a_0$, il faut évidemment que 0^0=1
   L'écriture générale des formules contenant des expression polynomiales de degré indéterminé exige de poser 0^0=1 pour rester valables pour toute valeur numérique des lettres – ce qui est précisément le propre des polynômes...

Voir détails complémentaires page suivante
13 novembre 2006/sd

Applications et ensemble produit

L'ensemble produit A×B est l'ensemble des couples (x; y) tels que x∈A et y∈B
Une application f de A vers B est définie par un triplet (A; B; G), où G est le graphe de l'application.
Le graphe de l'application f est l'ensemble des couples (x; $f(x)$). C'est une partie de l'ensemble produit A×B qui vérifie la condition qu'à tout élément a de A correspond un et un seul couple de la forme (a; b) du graphe.
Formellement, la condition que G doit vérifier pour que (A; B; G) soit une application s'écrit :

$$G \subset A\times B \quad \text{et} \quad \forall x\in A,\ \exists! y\in B \text{ tel que } (x;\, y)\in G$$

(«∃!» signifiant «il existe un et un seul...»)

Si l'un des ensembles A et B est vide, l'ensemble produit A×B est vide.
Dans ce cas, la seule partie de l'ensemble vide A×B est l'ensemble vide lui-même, et pour que (A; B; G) soit une application, il faut que G = Ø.
Examinons les différents cas de figure :

- Si A n'est pas vide et que B est vice, le triplet (A; Ø; Ø) n'est pas une application, car la condition ci-dessus n'est pas vérifiée : il existe un x∈A, mais il n'y pas de y correspondant tel que (x; y) ∈ G.
- Si B n'est pas vide, le triplet (Ø; B; Ø) est par contre toujours une application, que B soit vide ou non. En effet, la condition «∀x∈A ... » est toujours vérifiée puisque A est vide !
- En particulier, (Ø; Ø; Ø) est une application de Ø vers Ø;

Il y a donc bien une application (vide!) de l'ensemble vide vers lui-même.

Les mots

Avec un alphabet de 3 lettres, {1; 2; 3}, on peut former
$1 = 3^0$ mot de 0 lettres : 3^0
()
$3 = 3^1$ mots de 1 lettre
(1) (2) (3)
$9 = 3^2$ mots de 2 lettres
(11) (12) (13)
(21) (22) (23)
(31) (32) (33)
$27 = 3^3$ mots de 3 lettres
(111) (112) (113) (121) (122) (123) (131) (132) (133)
(211) (212) (213) (221) (222) (223) (231) (232) (233)
(311) (312) (313) (321) (322) (323) (331) (332) (333)
etc.

Avec un alphabet de 0 lettres, c'est-à-dire un ensemble vide {}, on peut former
1 mot de 0 lettres : le mot vide () $0^0 = 1$
Aucun mot d'une lettre ou plus... : $0^n = 0$ pour $n > 0$

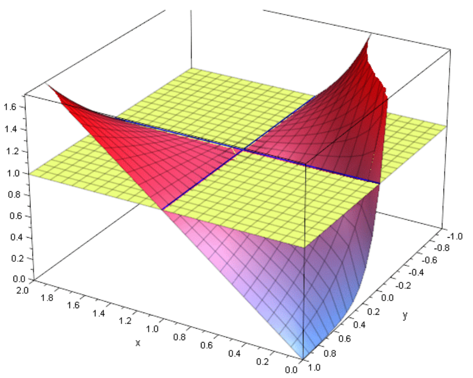
L'ensemble vide n'est pas vain...

L'«existence» d'un ensemble vide, de mots vides, et d'un alphabet vide, répondent à une nécessité de cohérence et de généralisation dont on peut se convaincre de différentes manières, et qui n'est qu'un prolongement naturel (juste un petit peu plus abstrait) de l'invention du nombre zéro. En théorie des ensembles, par exemple, les formules sur l'intersection et la réunion d'ensembles ont besoin de l'existence d'un ensemble vide pour rester valides dans tous les cas. Comme par exemple celle qui dit

$$\#A + \#B = \#(A\cup B) + \#(A\cap B)$$

Limites

$\lim\limits_{x,y\to 0} x^y$ est non défini, mais $\lim\limits_{x\to 0} x^r = \begin{cases} 0 \text{ si } r>0 \\ 1 \text{ si } r=0 \\ \infty \text{ si } r<0 \end{cases}$ On peut alors définir l'opération puissance en nombre réels dans les domaines suivants : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} & \to & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ (x;y) & \mapsto & x^y \end{array}$, et $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{Z} & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ (x;y) & \mapsto & x^y \end{array}$ en posant $0^r = \begin{cases} 0 \text{ si } r>0 \\ 1 \text{ si } r=0 \\ +\infty \text{ si } r<0 \end{cases}$



Graphe de [$z = x^y$]

$0^0 = 1$ occupe alors une position symétrique cohérente entre 0 et ∞

x^y est ainsi défini pour x réel positif ou nul et y réel quelconque, ou x réel quelconque et y entier relatif quelconque, avec valeur infinie admise.