A

Classe 3M6

Test géométrie analytique – 5.12.2006

CORRIGÉ

1. Soit γ le cercle d'équation $x^2+y^2+6x-8y+5=0$

a) Déterminez les coordonnées du centre et le rayon de ce cercle.

$$x^2+6x+y^2-8y+5=0 \;\Leftrightarrow\; \underbrace{x^2+6x+9}_{(x+3)^2}+\underbrace{y^2-8y+16}_{(y-4)^2}\underbrace{-9-16+5}_{-20}=0$$

$$\gamma=\underbrace{\boxed{(x+3)^2+(y-4)^2=20}}_{\text{équation canonique}} \qquad \text{Centre}: (-3;4) \quad \text{Rayon } \sqrt{20}$$

Note pour le dessin: $20=16+4=4^2+2^2$ ... ce qui permet de trouver des points à coordonnées entières

b) Soit A(1; 1), B(–2; –2), C(1; 2) trois points donnés par leurs coordonnées : déterminez analytiquement s'ils sont à l'intérieur du cercle, sur le cercle ou à l'extérieur.

Il suffit de calculer la valeur du premier membre de l'équation sous la forme cartésienne donnée et de regarder si on trouve une valeur < 0, = 0 ou > 0, ou encore dans le premier membre de l'équation canonique et de voir si on trouve une valeur < 20, =20, ou > 20

A: $(1+3)^2+(1-4)^2=16+9>20 \rightarrow$ extérieur /// B: $(-2+3)^2+(-2-4)^2=1+36>20 \rightarrow$ extérieur

C: $(1+3)^2+(2-4)^2=16+4=20 \rightarrow$ sur le cercle

c) Déterminez analytiquement la position de la droite d d'équation $2x-3y+1=0$ par rapport à γ (est-elle sécante, tangente, ou sans point commun avec le cercle).

Résoudre le système et vérifier s'il a 0, 1 ou deux solutions au moyen du discriminant

$$2x-3y+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{3y-1}{2} \qquad \text{Substitution dans l'équation du cercle...}$$

$$\left(\frac{3y-1}{2}+3\right)^2+(y-4)^2-20=0 \underset{\times 4}{\Rightarrow} \underbrace{(3y+5)^2}_{9y^2+30y+25}+\underbrace{4(y-4)^2}_{4y^2-32y+64}-80=0 \Leftrightarrow 13y^2-2y+9$$

$\Delta=4-4\cdot13\cdot9<0 \quad \Rightarrow \quad$ pas de solution $\Rightarrow$ la droite est extérieur au cercle

d) Déterminez les points d'intersection de la droite e : $3x-y+23=0$ avec le cercle et calculez la longueur de la corde.

$$3x-y+23=0 \Leftrightarrow y=3x+23 \qquad \text{Substitution dans l'équation du cercle...}$$

$$(x+3)^2+(3x+23-4)^2-20=0 \rightarrow \underbrace{(x+3)^2}_{x^2+6x+9}+\underbrace{(3x+19)^2}_{9x^2+114x+361}-20=0 \Leftrightarrow 10x^2+120y+350$$

$x^2+12x+35$ solutions: $\{-7;-5\}$

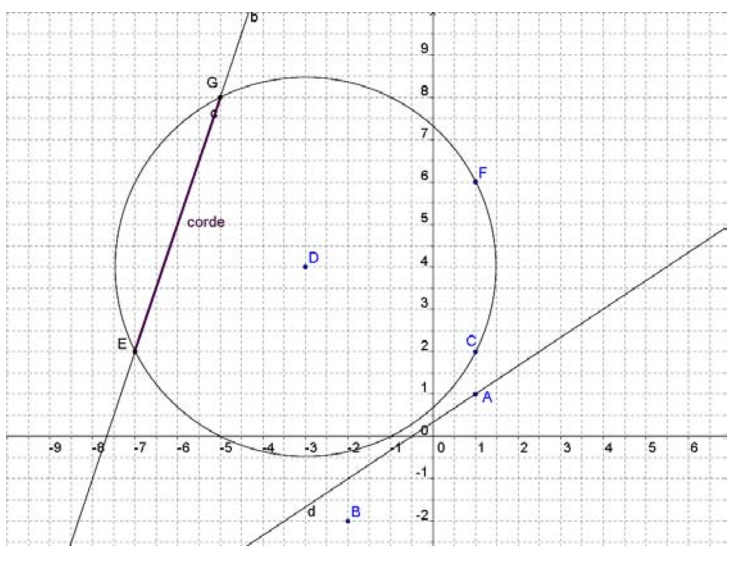
valeurs correspondantes de y : {2; 8}

Points d'intersection: $(-7;2)$ $(-5;8)$

Longueur de la corde :

$\sqrt{2^2+6^2}=\sqrt{40}\cong 6.32$

e) Faites un graphique correct de cette situation.



A

Classe 3M6

Test géométrie analytique – 5.12.2006

CORRIGÉ

2. On donne un cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 17 = 0$ et le point $Q(9; -2)$

$$x^2 + y^2 - 2x + 8y - 17 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 - 2x + 1}_{(x+3)^2} + \underbrace{y^2 + 8y + 16}_{(y-4)^2} \underbrace{-1 - 16 + -17}_{-34} = 0$$

$$\gamma = \underbrace{\boxed{(x-1)^2 + (y+4)^2 = 34}}_{\text{équation canonique}} \quad \text{Centre: } (1; -4) \quad \text{Rayon } \sqrt{34} \quad 34 = 25 + 9 = 5^2 + 3^2$$

ce qui permet de trouver des points du cercles sur le quadrillage comme par exemple $B(6;1)$

a) Déterminez l'équation de la polaire du point Q.

$(9-1)(x-1)+(-2+4)(y+4)=34$

$8(x-1)+2(y+4)-34=0$

$8x+2y-34=0$

$4x+y-17=0$

b) Calculez les coordonnées des points de contact des tangentes issues de Q.

Les points de contacts sont les intersections de la polaire avec le cercle.

Récrivons l'équation de la polaire pour substituer:

$y=-4x+17$

$$(x-1)^2 + \left(\underbrace{-4x+17+4}_{-4x+21}\right)^2 = 34$$

$x^2-2x+1+16x^2-168x+441-34=0$

$17x^2-170x+408 = 0$ simplification par 17

$x^2-10x+24 = 0$ solutions : $x=4$, $x=6$

Valeurs corrspondantes de y: $y=1$, $y=-7$

Les points de contact cherchés sont

$T_1(4;1)$ et $T_2(6;-7)$

c) Calculez les équations d'une de ces tangentes.

Il suffit de prendre la polaire en l'un de ces points de tangence (ici, on donnera les deux...)

$(4-1)(x-1)+(1+4)(y+4)=34$

$3(x-1)+5(y+4)-34=0$

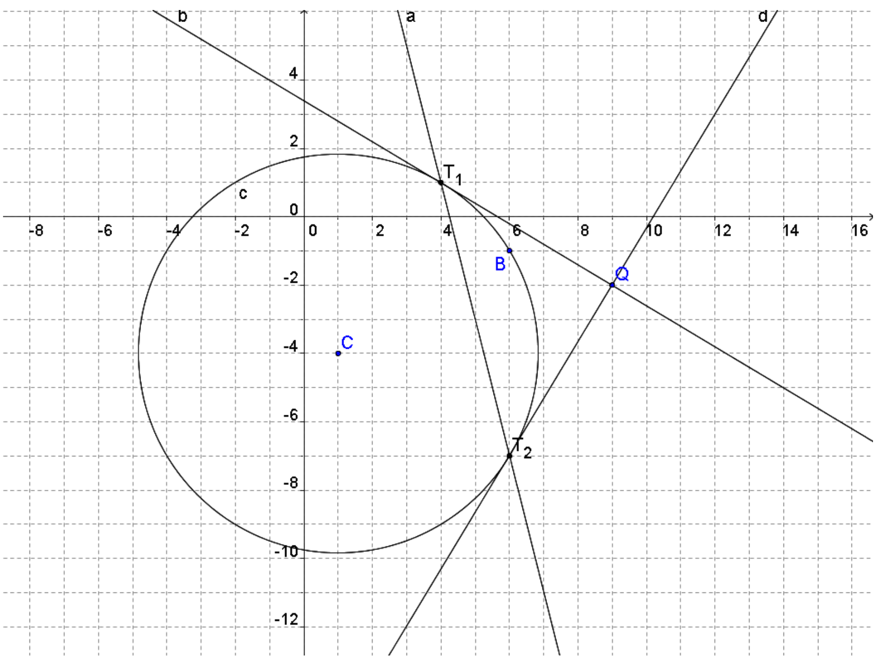
$t_1 = \boxed{3x+5y-17=0}$

$(6-1)(x-1)+(-7+4)(y+4)=34$

$5(x-1)-3(y+4)-34=0$

$t_2 = \boxed{5x-3y-51=0}$

d) Faites un graphique correct de cette situation



A

Classe 3M6

Test géométrie analytique – 5.12.2006

CORRIGÉ

3. **a)** Déterminez les cercles de rayon 5 qui sont tangents à l'axe *Ox* et qui passent par le point P(3; 8), et donnez leurs équations cartésiennes.

Les cercles de rayon 5 tangents à l'axe des x sont situés sur l'une des deux droites parallèles à l'axe à une distance de 5, c'est-à-dire les droites d'équations $y = 5$ et $y = -5$

Comme le cercle passe par le point *P* donné, son centre *C* est à une distance 5 du point P. Il est donc situé sur un cercle de centre 5 centré en *P*. On trouvera les centres possibles à l'intersection d'une des droites mentionnées et de ce cercle. Calculs...

Cercle de centre P et de rayon 5: $(x-3)^2+(y-8)^2=25$

Comme P est au-dessus de l'axe *Ox*, il suffit de chercher l'intersection avec la droite $y=5$

Par substitution, on obtient: $(x-3)^2+(5-8)^2=25 \Leftrightarrow x^2-6x-7=0$

Solutions: $x=-1,\ x=7$

Equations cartésiennes de ces deux cercles: $(x+1)^2+(y-5)^2=25,\quad (x-7)^2+(y-5)^2=25$

b) Trouvez (géométriquement si possible) où se trouve le deuxième point d'intersection de ces deux cercles et vérifiez avec les équations – (sinon, cherchez ce point de manière analytique et expliquez le résultat trouvé).

Argument géométrique : on peut voir que la figure formée par les deux cercles est symétrique par rapport à la droite y=5. L'autre point d'intersection de ces deux cercles et donc le symétrique du point P par rapport à cette droite. Il se trouve alors sans calcul. Pour P, y = 8. Pour son symétriques P', y = 2. On a donc P'(3; 2)

c) Déterminer l'angle sous lequel ces deux cercles se coupent.

Calculons l'une des polaires :

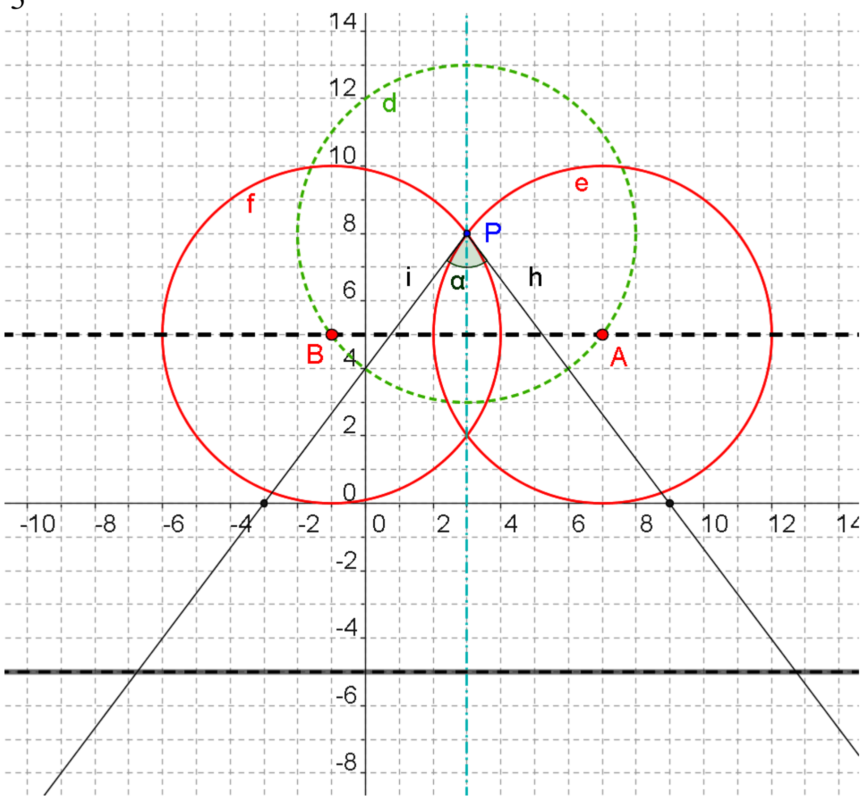
$(3+1)(x+1)+(8-5)(y-5)=25$ $\qquad 4x+3y-36$ $\qquad$ Pente : $-\frac{4}{3}$

Angle avec l'horizontale = Arctan($\frac{4}{3}$) = 53.13°

Angle avec la verticale : angle complémentaire, soit $90°-53.13°=36.87°$ (On peut aussi calculer Arctan($\frac{3}{4}$) = 36.87°)

Par symétrie, il suffit de doubler cette valeur

L'angle cherché vaut 73.74°



d) Faites un graphique correct de cette situation

CORRIGÉ

4. Déterminez le centre et le rayon du cercle d'équation $4x^2+4y^2-5y-6x-4=0$

Il faut mettre l'équation sous forme canonique, sans oublier de ramener à 1 les coefficients de x^2 et de y^2

Diviser terme à terme par 4 : $x^2+y^2-\frac{5}{4}y-\frac{3}{2}x-1=0$

Comparons à la forme canonique littérale $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$

$x^2+y^2\underbrace{-2\alpha}_{-3/2}x\underbrace{-2\beta}_{-5/4}y+\underbrace{\alpha^2+\beta^2-r^2}_{-1}=0 \qquad \alpha^2+\beta^2-r^2=-1$

On a alors $\alpha=\frac{3}{4}$; $\beta=\frac{5}{8}$; $r^2=\alpha^2+\beta^2+1=\frac{36+25+64}{64}=\frac{125}{64} \rightarrow r=\frac{\sqrt{125}}{8}\cong 1.40$

Note :

Pour plusieurs de ces exercices, il existe plusieurs méthodes

Pour le 1. c), on pouvait aussi calculer la distance entre la droite et le centre du cercle, et la comparer au rayon du cercle, ce qui est sans doute plus rapide que de chercher le nombre de points d'intersection

$2x-3y+1=0$ distance algébrique au centre$(3;-4)$: $\frac{2\cdot(-3)-3\cdot(4)+1}{\sqrt{13}}=\frac{-17}{\sqrt{13}}$

Comparons le carré de la distance au carré du rayon: $\frac{289}{13}\cong 22.23>20$

La droite est donc sans point commun avec le cercle – mais pas de très loin
(la distance vaut 4.71, et le rayon $\sqrt{20}\cong 4.47$)

Certains ont essayé sans y parvenir la méthode des équations paramétriques pour trouver les tangentes, au lieu de passer par la polaire. C'est possible mais cela me semble plus compliqué que la méthode de la polaire, et cela ne donne pas les points de contact. Exemple pour le 2. c) :

On écrit une équation de droite sous la forme $y=mx+h$
On écrit que le point Q est sur la droite: $-2=m\cdot 9+h$, d'où $h=-2-9m$
L'équation de la droite s'écrit alors: $mx-y-(9m+2)=0$
On écrit que la droite est à une distance du centre du cercle égale au rayon.

$\frac{|m\cdot 1-(-4)-(9m+2)|}{\sqrt{1+m^2}}=\sqrt{34}$ mettre au carré : $\frac{(-8m+2)^2}{1+m^2}=34$

$2(-4m+1)^2=17(1+m^2) \qquad 32m^2-16m+2-17-17m^2=0$

$15m^2-16m-15=0$ solutions : $m=-\frac{3}{5}$, $m=\frac{5}{3}$

Cela nous fournit les pentes des tangentes, et permet depuis là de calculer les angles.
Pour trouver les équations de ces tangentes, il faut encore calculer h par substitution.

$h=-2+\frac{27}{5}=\frac{17}{5}$, $h=-2-15=-17$, On trouve alors l'équation des deux tangentes:

t_1: $y=-\frac{3}{5}x+\frac{17}{5}$, soit $3x+5y-17=0$, t_2: $y=\frac{5}{3}x-17$, soit $5x-3y-51=0$

B

Classe 3M6
Test géométrie analytique – 5.12.2006

CORRIGÉ

1. Soit γ le cercle d'équation $x^2+y^2+8x-6y+5=0$

a) Déterminez les coordonnées du centre et le rayon de ce cercle.

$$x^2+y^2+8x-6y+5=0$$
$$x^2+8x+y^2-6y+5=0 \;\Leftrightarrow\; \underbrace{x^2+4x+16}_{(x+4)^2}+\underbrace{y^2-6y+9}_{(y-3)^2}\underbrace{-16-9+5}_{-20}=0$$
$$\gamma = \underbrace{\boxed{(x+4)^2+(y-3)^2=20}}_{\text{équation canonique}} \qquad \text{Centre}: (-4;3) \quad \text{Rayon } \sqrt{20}$$

Note pour le dessin: $20=16+4=4^2+2^2$ ... ce qui permet de trouver des points à coordonnées entières

b) Soit A(1; 1), B(–2; 2), C(–2; 1) trois points donnés par leurs coordonnées : déterminez s'ils sont à l'intérieur du cercle, sur le cercle ou à l'extérieur.

Il suffit de calculer la valeur du premier membre de l'équation sous la forme cartésienne donnée et de regarder si on trouve une valeur < 0, = 0 ou > 0, ou encore dans le premier membre de l'équation canonique et de voir si on trouve une valeur < 20, =20, ou > 20

A: $(1+4)^2+(1-3)^2=25+4>20\rightarrow$ extérieur /// B: $(-2+4)^2+(4-3)^2=4+1<20\rightarrow$ intérieur

C: $(2+4)^2+(1-3)^2=36+4=20\rightarrow$ extérieur

c) Déterminez analytiquement la position de la droite d d'équation $3x-2y+1=0$ par rapport à γ (est-elle sécante, tangente, ou sans point commun avec le cercle).

Résoudre le système et vérifier s'il a 0, 1 ou deux solutions au moyen du discriminant

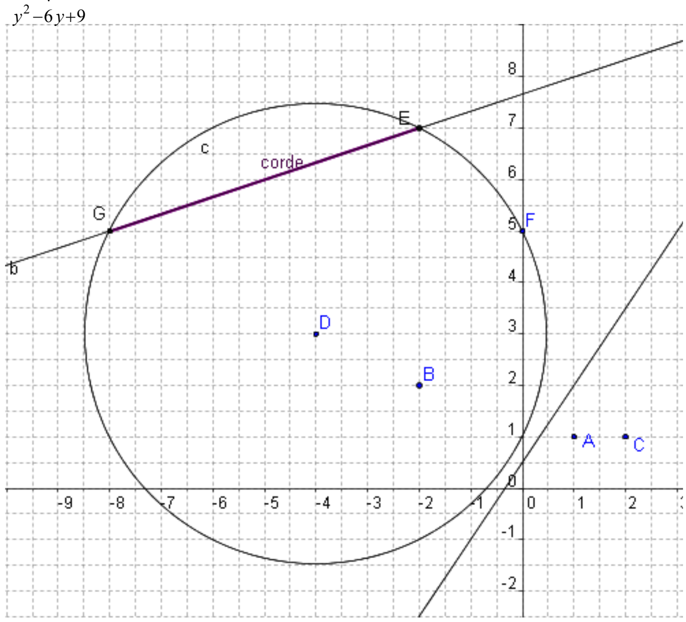
$$3x-2y+1=0 \Leftrightarrow y=\frac{3x+1}{2} \qquad \text{Substitution dans l'équation du cercle...}$$
$$(x+4)^2+\left(\frac{3x+1}{2}-3\right)^2-20=0 \;\underbrace{\rightarrow}_{\times 4}\; 4\underbrace{(x+4)^2}_{4x^2+32y+64}+\underbrace{(3x-5)^2}_{9y^2-30y+25}-80=0 \Leftrightarrow 13x^2+2y+9$$
$$\Delta=4-4\cdot 13\cdot 9<0 \quad\Rightarrow\quad \text{pas de solution} \quad\Rightarrow\quad \text{la droite est extérieur au cercle}$$

d) Déterminez les points d'intersection de la droite e : $x-3y+23=0$ avec le cercle et calculez la longueur de la corde.

$$x-3y+23=0 \Leftrightarrow x=3y-23 \qquad \text{Substitution dans l'équation du cercle...}$$
$$(3y-23+4)^2+(y-3)^2-20=0 \;\rightarrow\; \underbrace{(3y-19)^2}_{9y^2-114x+361}+\underbrace{(y-3)^2}_{y^2-6y+9}-20=0 \Leftrightarrow 10y^2-120y+350$$

$y^2-12x+35$ solutions: $\{7;5\}$
valeurs correspondantes de x : $\{-2; -8\}$
Points d'intersection: $(-2;\,7)$ $(-8;\,5)$
Longueur de la corde :
$\sqrt{2^2+6^2}=\sqrt{40}\cong 6.32$

e) Faites un graphique correct de cette situation.



B	**Classe 3M6** Test géométrie analytique – 5.12.2006	CORRIGÉ	

2. On donne un cercle d'équation $x^2+y^2+8x-2y-17=0$ et le point $Q(-2;\,9)$

$$x^2+y^2+8x-2y-17=0 \iff \underbrace{x^2+8x+16}_{(x+3)^2}+\underbrace{y^2-2y+1}_{(y-4)^2}\underbrace{-16-1+-17}_{-34}=0$$

$$\gamma=\underbrace{\boxed{(x+4)^2+(y-1)^2=34}}_{\text{équation canonique}} \quad \text{Centre: } (-4;1) \quad \text{Rayon } \sqrt{34} \quad 34=25+9=5^2+3^2$$

ce qui permet de trouver des points du cercles sur le quadrillage comme par exemple $B(0;4)$

a) Déterminez l'équation de la polaire du point Q.

$$(-2+4)(x+4)+(9-1)(y-1)=34$$
$$2(x+4)+8(y-1)-34=0$$

$$2x+8y-34=0$$
$$x+4y-17=0$$
$$x=17-4y$$

b) Calculez les coordonnées des points de contact des tangentes issues de Q.

Les points de contacts sont les intersections de la polaire avec le cercle.

Récrivons l'équation de la polaire pour substituer:

$x=-4y+17$

$$\Big(\underbrace{-4y+17+4}_{21-4y}\Big)^2+(y-1)^2=34$$

$$16y^2-168y+441+y^2-2y+1-34=0$$

$17y^2-170y+408=0$ simplification par 17

$y^2-10y+24=0$ solutions : $y=4,\ y=6$

Valeurs corrspondantes de x: $x=1,\ x=-7$

Les points de contact cherchés sont

$T_1(1;4)$ et $T_2(-7;\,6)$

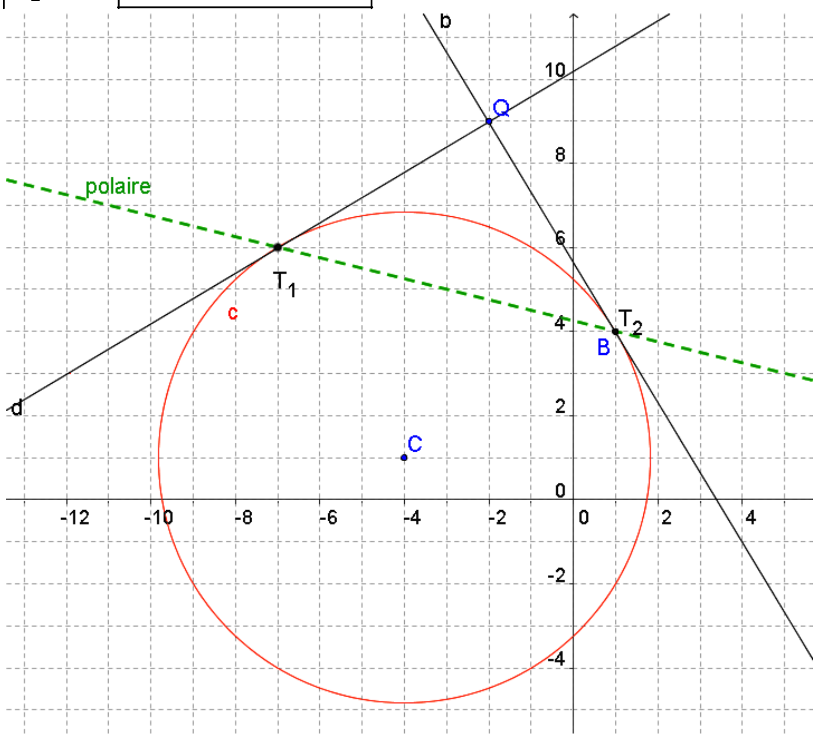
c) Calculez les équations d'une de ces tangentes.

Il suffit de prendre la polaire en l'un de ces points de tangence (ici, on donnera les deux...)

$$(1+4)(x+4)+(4-1)(y-1)=34$$
$$5(x+4)+3(y-1)-34=0$$
$$t_1=\boxed{5x+3y-17=0}$$

$$(-7+4)(x+4)+(6-1)(y-1)=34$$
$$-3(x+4)+5(y-1)-34=0$$
$$t_2=\boxed{-3x+5y-51=0}$$

d) Faites un graphique correct de cette situation.



B

Classe 3M6

Test géométrie analytique – 5.12.2006

CORRIGÉ

3. a) Déterminez des cercles de rayon 5 qui sont tangents à l'axe *Oy* et qui passent par le point P(7; 3), et donnez leurs équations cartésiennes.

NB : il aurait fallu donner P(8;3) pour avoir des chiffres plus simples

Les cercles de rayon 5 tangents à l'axe des x sont situés sur l'une des deux droites parallèles à l'axe Oy à une distance de 5, c'est-à-dire les droites d'équations $x=5$ et $x=-5$

Comme le cercle passe par le point *P* donné, son centre *C* est à une distance 5 du point P. Il est donc situé sur un cercle de centre 5 centré en *P*. On trouvera les centres possibles à l'intersection d'une des droites mentionnées et de ce cercle. Calculs...

Cercle de centre P et de rayon 5: $(x-7)^2+(y-3)^2=25$

Comme P est à droite de l'axe *Oy*, il suffit de chercher l'intersection avec la droite $x=5$

Par substitution, on obtient: $(5-7)^2+(y-3)^2=25 \Leftrightarrow y^2-6y-12=0$

Solutions: $y=-1.58$, $y=7.58$ $\quad x=5$

Equations cartésiennes de ces deux cercles: $(x-5)^2+(y+1.58)^2=25$, $(x-5)^2+(y-7.58)^2=25$

b) Trouvez (géométriquement si possible) où se trouve le deuxième point d'intersection de ces deux cercles et vérifiez avec les équations – (sinon, cherchez ce point de manière analytique et expliquez le résultat trouvé).

Argument géométrique : on peut voir que la figure formée par les deux cercles est symétrique par rapport à la droite x=5. L'autre point d'intersection de ces deux cercles et donc le symétrique du point P par rapport à cette droite. Il se trouve alors sans calcul. Pour P, y = 8. Pour son symétriques P', x = 2. On a donc P'(2; 3)

c) Déterminer l'angle sous lequel ces deux cercles se coupent.

Calculons l'une des polaires :

$(7-5)(x-5)+(3+1.58)(y-1.58)=25 \qquad 2x+4.58y+ \;.....{*}{*}{*}..... \qquad$ Pente : $-\dfrac{2}{4.58}$

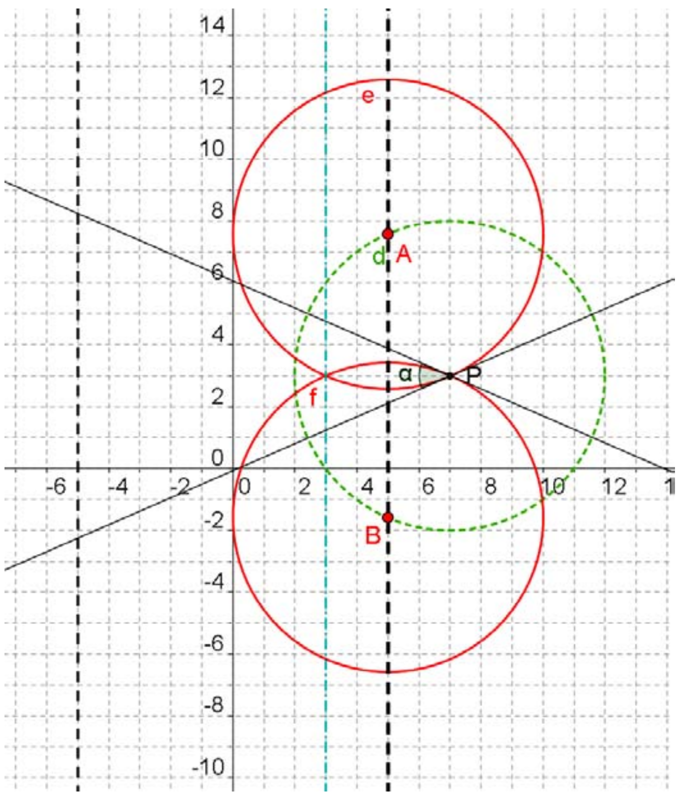
Angle avec l'horizontale = Arctan($\dfrac{2}{4.58}$) = 23.58°

Par symétrie, il suffit de doubler cette valeur

L'angle cherché vaut 47.15°

(Pas besoin de calculer les autres termes, on n'a besoin que de la pente)

d) Faites un graphique correct de cette situation.



B

Classe 3M6

Test géométrie analytique – 5.12.2006

CORRIGÉ

4. Déterminez le centre et le rayon du cercle d'équation $4x^2+4y^2-3y-5x-1=0$

Diviser terme à terme par 4 : $x^2+y^2-\frac{3}{4}y-\frac{5}{4}x-\frac{1}{4}=0$

Comparons à la forme canonique littérale $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$

$x^2+y^2\underbrace{-2\alpha}_{-3/4}x\underbrace{-2\beta}_{-5/4}y+\underbrace{\alpha^2+\beta^2-r^2}_{-1}=0$ $\qquad \alpha^2+\beta^2-r^2=-\frac{1}{4}$

On a alors $\alpha=\frac{3}{8}$; $\beta=\frac{5}{8}$; $r^2=\alpha^2+\beta^2+\frac{1}{4}=\frac{9+25+16}{64}=\frac{50}{64} \rightarrow r=\frac{\sqrt{2 \cdot 25}}{8}=\frac{5\sqrt{2}}{8} \cong 0.88$

Note : Pour plusieurs de ces exercices, il existe plusieurs méthodes !

Pour le 1. c), on pouvait aussi calculer la distance entre la droite et le centre du cercle, et la comparer au rayon du cercle, ce qui est sans doute plus rapide que de chercher le nombre de points d'intersection

$2x-3y+1=0$ distance algébrique au centre$(3;-4)$: $\frac{2\cdot(-3)-3\cdot(4)+1}{\sqrt{13}}=\frac{-17}{\sqrt{13}}$

Comparons le carré de la distance au carré du rayon: $\frac{289}{13} \cong 22.23 > 20$

La droite est donc sans point commun avec le cercle – mais pas de très loin
(la distance vaut 4.71, et le rayon $\sqrt{20} \cong 4.47$)

Certains ont essayé sans y parvenir la méthode des équations paramétriques pour trouver les tangentes, au lieu de passer par la polaire. C'est possible mais cela me semble plus compliqué que la méthode de la polaire, et cela ne donne pas les points de contact. Exemple pour le 2. c) :

On écrit une équation de droite sous la forme $y=mx+h$
On écrit que le point Q est sur la droite: $9=m\cdot(-2)+h$, d'où $h=2m+9$
L'équation de la droite s'écrit alors: $mx-y-(2m+9)=0$
On écrit que la droite est à une distance du centre du cercle égale au rayon.

$\frac{|m\cdot(-4)-1+(2m+9)|}{\sqrt{1+m^2}}=\sqrt{34}$ mettre au carré : $\frac{(-2m+8)^2}{1+m^2}=34$ $\quad \frac{4(m-4)^2}{1+m^2}=34$

$2(m-4)^2=17(1+m^2)$ $\quad 2m^2-16m+32=17+17m^2=0$ passons tout à droite

$15m^2+16m-15=0$ solutions : $m=\frac{3}{5}$, $m=-\frac{5}{3}$

Cela nous fournit les pentes des tangentes, et permet depuis là de calculer les angles.
Pour trouver les équations de ces tangentes, il faut encore calculer h par substitution.

$h=\frac{6}{5}+9=\frac{51}{5}$, $h=\frac{-10}{3}+9=\frac{17}{3}$, On trouve alors l'équation des deux tangentes:

t_1: $y=\frac{3}{5}x+\frac{51}{5}$, soit $3x-5y+51=0$, t_2: $y=-\frac{5}{3}x+\frac{17}{3}$, soit $5x+3y-17=0$