A

Classe 3M6 – Anal. combinatoire

Test – 14.03.2007

Corrigé

Tous les calculs doivent être explicitement indiqués en utilisant les opérations arithmétiques et les notations usuelles d'analyse combinatoire. Les grands nombres seront indiqués en notation scientifique avec 3 ou 4 chiffres significatifs.

1. Une marque de voiture propose pour son nouveau modèle 5 motorisations différentes, 6 couleurs. De plus vous pouvez avoir en option un toit ouvrant, ainsi qu'un GPS intégré. Combien cela représente-t-il de combinaisons possibles?

- Les possibilités se multiplient : 5 motorisations, 6 couleurs
- Options : 2 options, chaque option peut être choisie ou non, ce qui fait 2 possibilités pour chaque option, donc 4 combinaisons ($2 \cdot 2 = 2^2$).
- Résultat : $5 \cdot 6 \cdot 4$ = 120 combinaisons

2. Vous jetez trois fois de suite un dé à 6 faces.

a) Combien de séquences de chiffres pouvez-vous obtenir (en tenant compte de l'ordre)?

- 6^3 séquences, soit 216

b) Combien de ces séquences donnent-elles un total de 6 ?[1]

- Si le premier dé donne 1, on doit avoir un total de 5 sur les deux dés suivants, soit les possibilités 1+4, 2+3, 3+2, 4+1, ce qui en fait 4
- Si le premier dé donne 2, il faut un total de 4 sur les deux suivants, soit 3 possibilités. Avec 3 => 2 possibilités. Avec 4 => 1 seule. Avec 5 ou 6 ... impossible.
- Ce qui donne en tout 4+3+2+1 = 10 séquences de total 6

Autre raisonnement: compter les expressions additives
(moins évident à manipuler, car c'est difficile de s'assurer de les avoir toutes comptées...)

- On peut faire 1+2+3, avec 3! = 6 permutations de l'ordre
- On peut faire 1+1+4, avec 3 permutations seulement, car le 1 se répète
- On peut encore faire 2+2+2, ce qui ne donne qu'une séquence.
- Résultat : 6+3+1 = 10 possibilités

3. Combien de mots pouvez-vous former en utilisant une fois et une seule toutes les lettres du mot ASSASSINAT ?

- Nombre total de lettres : 10 : 3×A, 4×S, 1×I, 1×N, 1×T
- Résultat (permutations avec répétitions) : $\dfrac{10!}{3!\cdot 4!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = \dfrac{10!}{3!\cdot 4!} = \boxed{25'200}$

Autre méthode : dans les 10 cases pour les lettres, on choisit successivement les places des 3×A, puis celles des 4×S dans les 7 places restantes, etc., ce qui donne

- $C_7^{10} \cdot C_4^7 \cdot C_1^3 \cdot C_1^2 \cdot (C_1^1) \cdot \ = \boxed{25'200}$

4. Un classe comprend 20 élèves, dont 11 garçons et 9 filles.
Elle doit s'installer dans une salle de classe de 24 places, avec des tables à deux places.

a) De combien de manières peuvent-ils s'asseoir ? . . . . $A_{20}^{24} = \boxed{2{,}585 \cdot 10^{22}}$

b) Il y a dans cette classe un garçon et une fille qui veulent s'asseoir côte à côte. Combien de possibilités de s'asseoir y a-t-il alors pour respecter ce désir ?

- Il y a 12 tables, soit 12 choix de tables possibles pour le couple, et deux possibilités de les mettre à cette table (gauche-droite ou droite-gauche). Il reste 18 élèves à placer sur les 22 places restantes. Nombre résultant $12 \cdot 2 \cdot A_{18}^{22} = \boxed{1{,}124 \cdot 10^{21}}$

---

[1] ne cherchez pas nécessairement une formule...

A

Corrigé

c) Si quatre élèves désignés d'avance veulent être seuls à une table, combien de manières de s'asseoir cela fait-il ?

- Placer quatre élèves à quatre tables sur les 12 : $A_4^{12} = 11880$
- Choisir la place de chacun des 4 à gauche ou à droite sur ces 4 tables : $2^4 = 16$
- Placer les 16 autres sur les 8 tables restantes, soit 16 places, 16! possibilités (= A_{16}^{16})
- Résultat : multiplier ces trois nombres, 11880•16•16! = $3{,}977 \cdot 10^{18}$

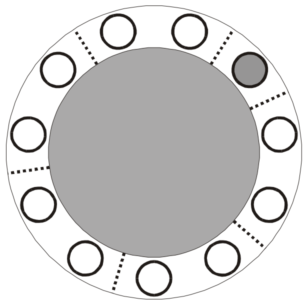
d) Cette classe veut se choisir un petit comité de 5 personnes pour préparer un projet de sortie. De combien de manières peut-on choisir ces 5 personnes ?

- $C_5^{20} = \boxed{15'504}$

e) De combien de manières peut-on choisir ce comité pour qu'il y ait au moins deux filles et au moins deux garçons ?

- Cela signifie soit 2 filles et 3 garçons, soit 3 filles et 2 garçons.
- $C_2^{11} \cdot C_3^9 + C_2^{11} \cdot C_3^9 = 55 \cdot 84 + 165 \cdot 36 = \boxed{10'560}$

5. Vous[2] avez invité 5 couples pour une petite fête, et vous voulez les placer avec vous autour d'une table ronde de 11 places.



a) De combien de manières pouvez-vous organiser les places, en laissant les couples ensemble (compter les possibilités en tenant compte uniquement de qui est assis à droite et à gauche de qui et non qui est assis sur quelle chaise) ?

- Vous vous placez vous-mêmes. Ensuite il y a 5 paires de chaises pour les couples, soit 5! possibilités de placer les couples. Puis chaque garçon peut être à droite ou à gauche, ce qui fait 2^5 possibilités. Résultat : $5! \cdot 2^5 = 120 \cdot 32 = 3840$

b) Combien de possibilités si vous voulez garder un alternance garçon-fille parmi les invités (vous excepté, bien sûr, qui aurez alors un garçon d'un côté et une fille de l'autre)

- A ce moment, si le premier garçon est à gauche, tous les autres aussi. Il n'y a que deux manières de placer les hommes par rapport à leur compagne : soit tous à gauche, soit tous à droite. Résultat : 5!•2 = 240

6. Sur un damier de jeu d'échecs (8×8), vous voulez placer 5 pions de manière qu'il n'y en ait jamais deux ni sur une même ligne ni sur une même colonne. Combien cela fait-il de possibilités ?

- Choisir sur quelles lignes vous placez les pions : C_5^8
- Choisir dans chaque ligne parmi celles-ci à quelle colonne vous mettez un pion A_5^8
- Nombre de possibilités $C_5^8 \cdot A_5^8 = 56 \cdot 6720 = \boxed{376'320}$

Autre méthode : placer les pions successivement comme s'ils étaient numérotés : 64•49•36•25•16 = 45'158'400 ; ensuite, comme les pions sont indiscernables, diviser par les permutations de leur ordre : 45'158'400 / 5! = 376'320

7. De combien de manières peut-on aligner 5 boules jaunes, 7 boules vertes et 4 boules bleues?

- Permutations avec répétitions : $\overline{P}_{5,7,4}^{16} = \dfrac{16!}{5! \cdot 7! \cdot 4!} = \boxed{1'441'440}$

---

[2] «vous» est au singulier, car vous êtes malheureusement encore célibataire...

B

Classe 3M6 – Anal. combinatoire

Test – 14.03.2007

Corrigé

Tous les calculs doivent être explicitement indiqués en utilisant les opérations arithmétiques et les notations usuelles d'analyse combinatoire. Les grands nombres seront indiqués en notation scientifique avec 3 ou 4 chiffres significatifs.

1. Une marque de voiture propose pour son nouveau modèle 4 motorisations différentes, 7 couleurs. De plus vous pouvez avoir en option un toit ouvrant, un GPS intégré, et des jantes en aluminium. Combien cela représente-t-il de combinaisons possibles?

- Les possibilités se multiplient : 4 motorisations, 7 couleurs
- Options : 3 options, chacune peut être choisie ou non, ce qui fait 2 possibilités pour chaque option, donc 8 combinaisons ($2•2•2 = 2^3$).
- Résultat : 4•7•8 = 224 combinaisons

2. Vous jetez trois fois de suite un dé à 6 faces.

a) Combien de séquences de chiffres pouvez-vous obtenir (en tenant compte de l'ordre)?

- 6^3 séquences, soit 216

b) Combien de ces séquences donnent-elles un total de 15 ?[1]

- Si le premier dé donne 6, on doit avoir un total de 9 sur les deux dés suivants, soit les possibilités 3+6, 4+5, 5+4, 6+3, ce qui en fait 4
- Si le premier dé donne 5, il faut un total de 10 sur les deux suivants, soit 3 possibilités. Avec 4 => 2 possibilités. Avec 3 => 1 seule. Avec 2 ou 1 ... impossible.
- Ce qui donne en tout 4+3+2+1 = 10 séquences de total 6

Autre raisonnement: compter les expressions additives
(moins évident à manipuler, car c'est difficile de s'assurer de les avoir toutes comptées...)

- On peut faire 3+6+6, avec 3 permutations seulement, car le 1 se répète
- On peut faire 4+5+6, avec 3! = 6 permutations de l'ordre des dés
- On peut encore faire 5+5+5, ce qui ne donne qu'une séquence.
- Résultat : 3+6+1 = 10 possibilités

3. Combien de mots pouvez-vous former en utilisant une fois et une seule toutes les lettres du mot URLUBERLU ?

- Nombre total de lettres : 9 : 3×U, 2×R, 2×L, 1×B, 1×E
- Résultat (permutations avec répétitions) : $\dfrac{9!}{3!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!} = \dfrac{9!}{3!\cdot 2!\cdot 2!} = \boxed{15'120}$

Autre méthode : dans les 10 cases pour les lettres, on choisit successivement les places des 3×A, puis celles des 4×S dans les 7 places restantes, etc., ce qui donne

- $C_3^9 \cdot C_2^6 \cdot C_2^4 \cdot C_1^2 \cdot (C_1^1)\cdot = \boxed{15'120}$

4. Un classe comprend 18 élèves, dont 7 garçons et 11 filles.
Elle doit s'installer dans une salle de classe de 22 places, avec des tables à deux places.

a) De combien de manières peuvent-ils s'asseoir ? .... $A_{18}^{22} = \boxed{4{,}683\cdot 10^{19}}$

b) Il y a dans cette classe un garçon et une fille qui veulent s'asseoir côte à côte. Combien de possibilités de s'asseoir y a-t-il alors pour respecter ce désir ?

- Il y a 11 tables, soit 11 choix de tables possibles pour le couple, et deux possibilités de les mettre à cette table (gauche-droite ou droite-gauche). Il reste 16 élèves à placer sur les 20 places restantes. Nombre résultant $11\cdot 2\cdot A_{16}^{20} \cong \boxed{2.230^{18}}$

c) Si quatre élèves désignés d'avance veulent être seuls à une table, combien de manières de

[1] ne cherchez pas nécessairement une formule...

s'asseoir cela fait-il ?

- Placer quatre élèves à quatre tables sur les 11 : $A_4^{11} = 7920$
- Choisir la place de chacun des 4 à gauche ou à droite sur ces 4 tables : $2^4 = 16$
- Placer les 14 autres sur les 7 tables restantes, soit 14 places, 14! possibilités (= A_{14}^{14})
- Résultat : multiplier ces trois nombres, 7920•16•14! = $\underline{\underline{1.105 \cdot 10^{16}}}$

d) Cette classe veut se choisir un petit comité de 6 personnes pour préparer un projet de soirée. De combien de manières peut-on choisir ces 6 personnes ?

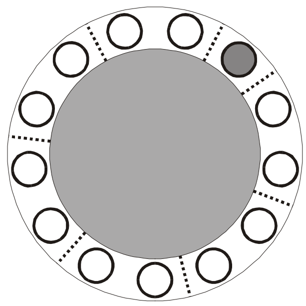
- $C_6^{18} = 18564$

e) De combien de manières peut-on choisir ce comité pour qu'il y ait au moins deux filles et au moins deux garçons ?

- Cela signifie soit 2 filles et 4 garçons, soit 3 filles et 3 garçons, soit 4 filles et 2 garçons
- $C_2^7 \cdot C_4^{11} + C_3^7 \cdot C_3^{11} + C_4^7 \cdot C_2^{11} = 21 \cdot 330 + 35 \cdot 165 + 35 \cdot 55 = 6930 + 5775 + 1925 = \boxed{14'630}$

5. Vous[2] avez invité 6 couples pour une petite fête, et vous voulez les placer avec vous autour d'une table ronde de 13 places.

a) De combien de manières pouvez-vous organiser les places, en laissant les couples ensemble (compter les possibilités en tenant compte uniquement de qui est assis à droite et à gauche de qui et non qui est assis sur quelle chaise) ?



- Vous vous placez vous-mêmes. Ensuite il y a 6 paires de chaises pour les couples, soit 6! possibilités de placer les couples. Puis chaque garçon peut être à droite ou à gauche, ce qui fait 2^6 possibilités. Résultat : $6! \cdot 2^6 = 720 \cdot 64 = \underline{\underline{46080}}$

b) Combien de possibilités si vous voulez garder un alternance garçon-fille parmi les invités (vous excepté, bien sûr, qui aurez alors un garçon d'un côté et une fille de l'autre)

- A ce moment, si le premier garçon est à gauche, tous les autres aussi. Il n'y a que deux manières de placer les hommes par rapport à leur compagne : soit tous à gauche, soit tous à droite. Résultat : $6! \cdot 2 = \underline{\underline{1440}}$

6. Sur un damier de jeu de dames (10×10), vous voulez placer 4 pions de manière qu'il n'y en ait jamais deux ni sur une même ligne ni sur une même colonne. Combien cela fait-il de possibilités ?

- Choisir sur quelles lignes vous placez les pions : C_5^8
- Choisir dans chaque ligne parmi celles-ci à quelle colonne vous mettez un pion A_5^8
- Nombre de possibilités $C_4^{10} \cdot A_4^{10} = 210 \cdot 5040 = \boxed{1'058'400}$

Autre méthode : placer les pions successivement comme s'ils étaient numérotés : 100•81•64•49 = 25'401'600 ; ensuite, comme les pions sont indiscernables, diviser par les permutations de leur ordre : 25'401'600 / 4! = 1'058'400

7. De combien de manières peut-on aligner 6 boules rouge, 8 boules jaunes et 3 boules bleues?

- Permutations avec répétitions : $\overline{P}_{6,8,3}^{17} = \dfrac{17!}{6! \cdot 8! \cdot 3!} = \boxed{2'042'040}$

---

[2] «vous» est au singulier, car vous êtes malheureusement encore célibataire...