A

Classe 3M6 – Analyse

Test – 4 octobre 2006

Corrigé

1. Vérifier que $\dfrac{x-2}{\sqrt{(x-1)^3}}$ est une primitive de $\dfrac{2x}{\sqrt{x-1}}$

Le problème a été malencontreusement posé «à l'envers». C'est la deuxième expression qui est une primitive de la première, et non l'inverse, comme on le voit par les calculs ci-dessous.

$$\left(\frac{x-2}{\sqrt{(x-1)^3}}\right)' = \left((x-2)(x-1)^{-\frac{3}{2}}\right)' = \underbrace{(x-1)^{-\frac{3}{2}}}_{***} + (x-2)\left(-\tfrac{3}{2}\right)(x-1)^{-\frac{5}{2}} =$$

$$= \underbrace{(x-1)(x-1)^{-\frac{5}{2}}}_{***} + (x-2)\left(-\tfrac{3}{2}\right)(x-1)^{-\frac{5}{2}} = \left[(x-1)+(x-2)\left(-\tfrac{3}{2}\right)\right](x-1)^{-\frac{5}{2}} =$$

$$= \frac{-x+4}{2}(x-1)^{-\frac{5}{2}} = \frac{-(x-4)}{2\sqrt{(x-1)^5}}$$ ce qui ne correspond pas à l'autre expression

$$\left(\frac{2x}{\sqrt{x-1}}\right)' = \left(2x(x-1)^{-\frac{1}{2}}\right)' = 2\underbrace{(x-1)^{-\frac{1}{2}}}_{***} + 2x\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)\cdot(x-1)^{-\frac{3}{2}} = 2\underbrace{(x-1)(x-1)^{-\frac{3}{2}}}_{***} + 2x\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)\cdot(x-1)^{-\frac{3}{2}} =$$

$$= \left[2(x-1)+2x\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right]\cdot(x-1)^{-\frac{3}{2}} = (2x-2-x)(x-1)^{-\frac{3}{2}} = (x-2)(x-1)^{-\frac{3}{2}} = \frac{x-2}{\sqrt{(x-1)^3}}$$

*** : pour pouvoir mettre en évidence $(x-1)^{-\frac{3}{2}}$

2. $\displaystyle\int\left(3x^2+5x-1\right)dx = x^3+\frac{5x^2}{2}-x+C$

3. Ici il <u>faut</u> effectuer pour pouvoir calculer la primitive

$$\int\left(x^3+3\right)^2 dx = \int\left(x^6+6x^3+9\right)dx = \frac{x^7}{7}+\frac{6x^4}{4}+9x+C = \frac{x^7}{7}+\frac{3x^4}{2}+9x+C$$

4. Ici on <u>pourrait aussi</u> effectuer pour calculer la primitive, mais ce serait <u>plus compliqué</u>

$\int 4x\left(x^2-5\right)^3 dx = \ldots$ Observer que l'expression ressemble à $\left[\left(x^2-5\right)^4\right]'$

$\left[\left(x^2-5\right)^4\right]' = 4\left(x^2-5\right)^3\cdot 2x = 8x\left(x^2-5\right)^3$ = double de l'expression sous le signe $\int$

L'intégrale cherchée est donc $\dfrac{\left(x^2-5\right)^4}{2}+C$

5. $\displaystyle\int\sqrt{(x-1)^5}\,dx = \int(x-1)^{\frac{5}{2}}\,dx = \frac{(x-1)^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}+C = \frac{2(x-1)^{\frac{7}{2}}}{7}+C = \frac{2}{7}\sqrt{(x-1)^7}+C$

Ici, on peut calculer ainsi car la dérivée de $(x-1)$ est égale à 1

---

1. Retrouver si possible une réponse sous forme de racines aux exercices dont la donnée est sous forme de racine.
2. La sous-question 7 b) peut être traitée indépendamment de la sous-questions a)

A

Corrigé

6. Calculer $\int \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt{x^2-2x+3}}$ – Observer que $\left(x^2-2x+3\right)' = 2x-2 = 2(x-1)$

$$\int \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt{x^2-2x+3}} = \int \left(x^2-2x+3\right)^{-\frac{1}{2}}(x-1)\,dx$$

$$\text{Or } \left[\left(x^2-2x+3\right)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}\left(x^2-2x+3\right)^{-\frac{1}{2}}(2x-2) = \left(x^2-2x+3\right)(x-1)$$

$$\text{L'intégrale cherchée est donc } \left(x^2-2x+3\right)^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{x^2-2x+3} + C$$

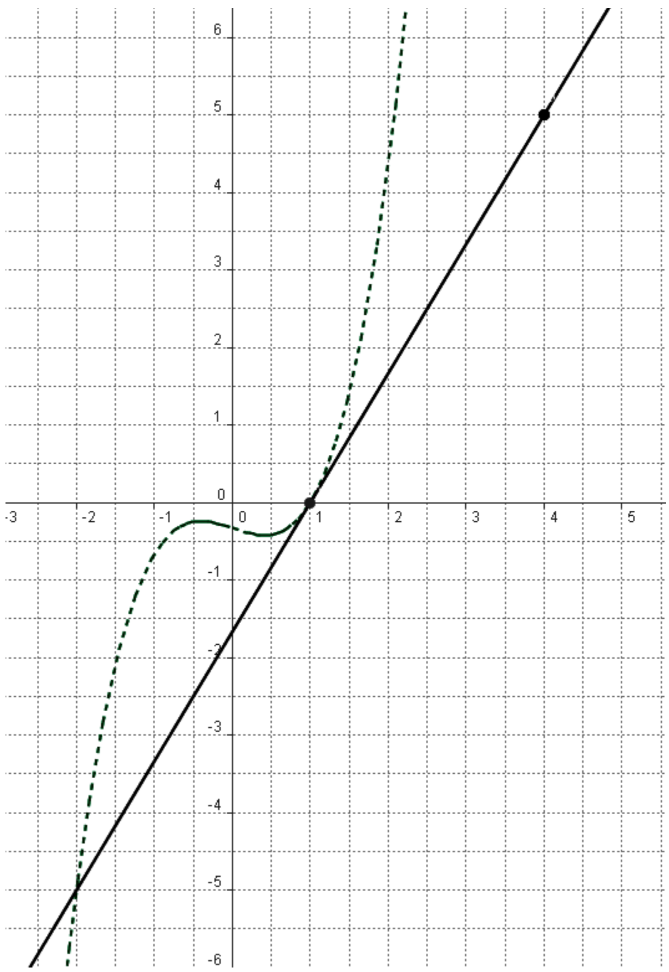
7. **a)** Trouver la fonction f sachant que $f\,'(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}$ et que $f(1) = 0$

$$f(x) = \int\left(2x^2 - \tfrac{1}{3}\right)dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{x}{3} + C$$

$$\text{Comme f(1) = 0, on a } \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + C = 0, \text{ donc } C = -\frac{1}{3}, \quad f(x) = \frac{2x^3-x-1}{3}$$

b) Avec ces indications, dessiner un point et une tangente du graphe de la courbe $y = f(x)$

$f(1) = 0$ donne le point (1;0). La pente de la tangente en ce point est $f'(1) = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$



8. Trouver la fonction f sachant que

$$f\,''(x) = 3x-1; \quad f(1) = 0; \quad f(-1) = -3$$

$$f''(x) = 3x-1 \quad\rightarrow\quad f'(x) = \frac{3x^2}{2} - x + C$$

$$\rightarrow \quad f(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} + Cx + D$$

$$\rightarrow \quad f(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} + Cx + D$$

$$f(1) = 0 \quad\rightarrow\quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + C + D = 0;$$

$$f(-1) = -3 \quad\rightarrow\quad \frac{-1}{2} - \frac{1}{2} - C + D = -3$$

Ce qui donne le système d'équations

$$\begin{array}{rcl|c|c} C+D & = & 0 & +1 & +1 \\ -C+D & = & -2 & +1 & -1 \end{array}$$

$$2D = -2 \quad\rightarrow\quad D = -1\,;\ 2C = 2 \quad\rightarrow\quad C = 1$$

$$f(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} + x - 1$$

Barème

1	2	3	4	5	6	7a	7b	8	Tot	Barème N = 1 + 5*(P/74)
5	5	10	10	8	10	6	8	15	77	[0 pts = 1 ; 74 pts = 6]

B

Classe 3M6 – Analyse
Test – 4 octobre 2006

Corrigé

1. Vérifier que $\dfrac{x+6}{\sqrt{(x+3)^3}}$ est une primitive de $\dfrac{2x}{\sqrt{x+3}}$

Le problème a été malencontreusement posé «à l'envers». C'est la deuxième expression qui est une primitive de la première, et non l'inverse, comme on le voit par les calculs ci-dessous.

$$\left(\frac{x+6}{\sqrt{(x+3)^3}}\right)' = \left((x+6)(x+3)^{-\frac{3}{2}}\right)' = \underbrace{(x+3)^{-\frac{3}{2}}}_{***} + (x+6)\left(-\tfrac{3}{2}\right)(x+3)^{-\frac{5}{2}} =$$

$$= \underbrace{(x+3)(x+3)^{-\frac{5}{2}}}_{***} + (x+6)\left(-\tfrac{3}{2}\right)(x+3)^{-\frac{5}{2}} = \left[(x+3)+(x+6)\left(-\tfrac{3}{2}\right)\right](x+3)^{-\frac{5}{2}} =$$

$$= \frac{-x-12}{2}(x+3)^{-\frac{5}{2}} = \frac{-(x+12)}{2\sqrt{(x+3)^5}}$$ ce qui ne correspond pas à l'autre expression

$$\left(\frac{2x}{\sqrt{x+3}}\right)' = \left(2x(x+3)^{-\frac{1}{2}}\right)' = 2\underbrace{(x+3)^{-\frac{1}{2}}}_{***} + 2x\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)\cdot(x+3)^{-\frac{3}{2}} = 2\underbrace{(x+3)(x+3)^{-\frac{3}{2}}}_{***} + 2x\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)\cdot(x+3)^{-\frac{3}{2}} =$$

$$= \left[2(x+3)+2x\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right]\cdot(x-1)^{-\frac{3}{2}} = \left(2x+6-x\right)(x-1)^{-\frac{3}{2}} = (x+6)(x+3)^{-\frac{3}{2}} = \frac{x+6}{\sqrt{(x+3)^3}}$$

*** : pour pouvoir mettre en évidence $(x+3)^{-\frac{3}{2}}$

2. $\displaystyle\int\left(6x^2-3x+1\right)dx = \frac{6x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+x+C = 2x^3-\frac{3x^2}{2}+x+C$

3. Ici il <u>faut</u> effectuer pour pouvoir calculer la primitive

$$\int\left(x^4+5\right)^2 dx = \int\left(x^8+10x^3+25\right)dx = \frac{x^9}{9}+\frac{10x^4}{4}+25x+C = \frac{x^9}{9}+\frac{5x^4}{2}+25x+C$$

4. Ici on <u>pourrait aussi</u> effectuer pour calculer la primitive, mais ce serait <u>plus compliqué</u>

$\displaystyle\int 20x\left(x^2-7\right)^3 dx = \ldots$ Observer que l'expression ressemble à $\left[\left(x^2-7\right)^4\right]'$

$\left[\left(x^2-7\right)^4\right]' = 4\left(x^2-7\right)^3\cdot 2x = 8x\left(x^2-7\right)^3$ = semblable à l'expression sous le signe $\int$

Multiplier par $\dfrac{20}{8}=\dfrac{5}{2}$ pour obtenir le facteur 20. L'intégrale cherchée est donc $\dfrac{5\left(x^2-7\right)^4}{2}+C$

5. $\displaystyle\int\sqrt{(x-1)^7}\,dx = \int(x-1)^{\frac{7}{2}}\,dx = \frac{(x-1)^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}}+C = \frac{2(x-1)^{\frac{9}{2}}}{9}+C = \frac{2}{9}\sqrt{(x-1)^9}+C$

Ci-dessus, on peut calculer ainsi car la dérivée de (x – 1) est égale à 1

---

1. Retrouver si possible une réponse sous forme de racines aux exercices dont la donnée est sous forme de racine.
2. La sous-question 7 b) peut être traitée indépendamment de la sous-questions a)

B

Corrigé

6. Calculer $\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+2x-5}}$ Observer que $\left(x^2+2x-5\right)' = 2x+2 = 2(x+1)$

$$\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+2x-5}} = \int \left(x^2+2x-5\right)^{-\frac{1}{2}}(x+1)\,dx$$

Or $\left[\left(x^2+2x-5\right)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}\left(x^2+2x-5\right)^{-\frac{1}{2}}(2x+2) = \left(x^2+2x-5\right)^{-\frac{1}{2}}(x+1)$

L'intégrale cherchée est donc $\left(x^2+2x-5\right)^{\frac{1}{2}}+C = \sqrt{x^2+2x-5}+C$

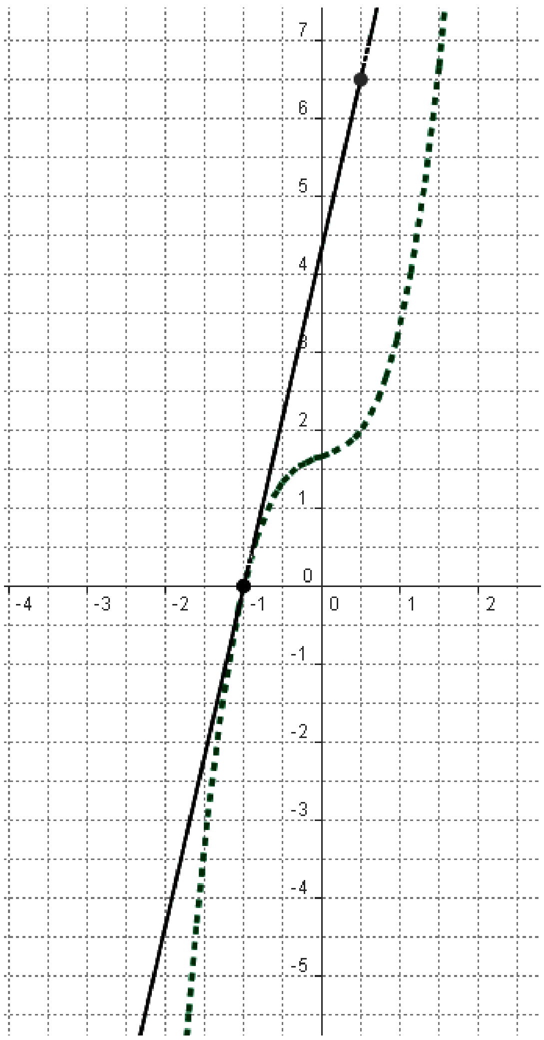
7. **a)** Trouver la fonction f sachant que $f'(x)=4x^2+\frac{1}{3}$ et que $f(-1) = 0$

$$f(x)=\int\left(4x^2+\tfrac{1}{3}\right)dx = \frac{4x^3}{3}+\frac{x}{3}+C$$

Comme $f(-1) = 0$, on a $\frac{-4}{3}+\frac{-1}{3}+C=0$, donc $C=\frac{5}{3}$, $f(x)=\frac{4x^3+x+5}{3}$

b) Avec ces indications, montrer un point et une tangente du graphe de la courbe $y = f(x)$

$f(-1) = 0$ donne le point (-1;0). Pente de la tangente en ce point : $f'(-1)=4+\frac{1}{3} = 4\,{}^1\!/_3 = \frac{13}{3}$



8. **a)** Trouver la fonction f sachant que
$f''(x)=3x+1;\quad f(1)=2;\quad f(-1)=-3$

$$f''(x)=3x+1 \quad\to\quad f'(x)=\frac{3x^2}{2}+x+C$$

$$\to\quad f(x)=\frac{x^3}{2}+\frac{x^2}{2}+Cx+D$$

$$f(1)=2 \quad\to\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+C+D=2;$$

$$f(-1)=-3 \quad\to\quad \frac{-1}{2}+\frac{1}{2}-C+D=-3$$

Ce qui donne le système d'équations

$$\begin{array}{rcl|c|c} C+D & = & 1 & +1 & +1 \\ -C+D & = & -3 & +1 & -1 \end{array}$$

$2D=-2 \ \to\ D=-1$; $2C=4 \ \to\ C=2$

$$f(x)=\frac{x^3}{2}+\frac{x^2}{2}+2x-1$$

Barème

1	2	3	4	5	6	7a	7b	8	Tot	Barème N = 1 + 5*(P/74) [0 pts = 1 ; 74 pts = 6]
5	5	10	10	8	10	6	8	15	77	