Corrigés succincts de quelques exercices de combinatoire

Par simplification typographique, les combinaisons et arrangements sont notés en ligne plutôt qu'en colonne

Exercice 2.8

Ici, on considère les dispositions les gens par rapport à leurs voisins (qui est à gauche ou à droite de qui) et non par rapport aux chaises.
a) On place une première personne n'importe où (ça ne change rien), et on place les 8 autres par rapport à elle => 8! possibilités = 40320
b) On place les deux personnes à mettre ensemble (2 possibilités, le premier à gauche ou à droite), puis les 7 autres sur les autres places (7! possibilités).
2•7! = 10080

Exercice 2.21

a) 3 options à chaque case, 13 cases à remplir => 3^{13} pronostics =
b1) Pour réaliser 13 points, toutes les cases doivent avoir le pronostic correct => une seule possibilité
b2) Pour réaliser 12 points, il faut répondre juste sur 12 cases, et il y a 13 manières de choisir ces 12 cases sur 13, et faux à la case restante, soit 2 possibilités, puisqu'il y a 3 réponses possibles, 1 juste et 2 fausses à chaque fois => 13•12 = 26
b3) Pour réaliser 4 points : C(13,4) choix pour les cases justes
2^7 possibilités de répondre faux sur les 9 cases restantes. Nombre total de possibilités = C(13,4)•2^9 = 366080
b4) Faux dans toutes les cases, 2 mauvais pronostic par case => 2^{13} = 8192 possibilités

Exercice 2.23

a) C(45,6) = 8145060
b1) Pour avoir 6 points, une seule possibilité : choisir les 6 bons numéros
b2) Pour avoir 0 point, il faut avoir choisi 6 numéros hors des 6 bons numéros, soit 6 numéros sur 39 : C(39,6) = 3262623
b3) Pour avoir 3 points, il faut avoir choisi 3 bons numéros sur les 6 sortis (C(6,3)) et 3 numéros parmi les 39 autres (C(39,3)), ce qui donne C(6,3)•C(6,3) = 182780 possibilités

Exercice 2.26

c) Au moins 2 dames <==> 3dames *ou* 4 dames *ou* 5 dames
3 dames ==> 2 messieurs: C(25,3) • C(15,2) = 41500
4 dames ==> 1 messieurs: C(25,4) • C(15,1) = 136500
5 dames ==> 0 messieurs: C(25,5) • C(15,0) = 34125
Total 484380
Somme(C(23;i)•C(15;5–i) pour i = 3...5)

3	2	241500
4	1	189750
5	0	53130
		484380

Exercice 2.31

c) Mettre 1 jeton bleu et 3 jetons jaunes dans la première colonne : la colonne a 5 cases, il y a donc 5 possibilités de placer le jeton bleu et C(4,3) possibilités de placer 3 jaunes dans les 4 autres cases => C(5,1) • C(4,2) = 30
Il reste 30 cases sur lesquelles il faut placer encore les 3 bleus et le jaune restant,
soit C(30,3) • C(27,1) = C(30,3) • 27 = 109620
Résultat : 20 • 109620 = 3'288'600

Exercice 2.32

c) Il y a 6 jetons à placer, et il y en a au plus un par colonne et un par ligne.
Choisissons d'abord sur quelles colonnes placer les jetons : 6 colonnes sur 10, soit C(10,6) possibilités
Choisissons ensuite sur quelles lignes placer les jetons dans chaque colonne. Comme il ne doit y avoir qu'un jeton par ligne, cela revient à choisir de manière ordonnée sur quelles lignes parmi 30 placer ces 6 jetons, soit A(30,6).
Le nombre de possibilité est donc C(10,6) • A(30,6) = 89'778'780'000
(votre calculatrice affiche le résultat en notation scientifique, car il y a trop de chiffres)
On aurait pu commencer en choisissant les lignes, et on trouverait C(10,6) • A(30,6)

Cela revient au même : $C_6^{10} \bullet A_6^{30} = \dfrac{10!}{6! \bullet 4!} \bullet \dfrac{30!}{24!} = \dfrac{10!}{4!} \bullet \dfrac{30!}{6! \bullet 24!} = A_6^{10} \bullet C_6^{30}$

On pourrait encore raisonner en choisissant les lignes et les colonnes indépendamment des places où mettre les pions, puis compter le nombre de manière de placer les pions, ce qui revient à compter les permutations des 6 lignes ou des 6 colonnes. On arrive avec ce raisonnement à la formule C(10,6) • C(30,6) • 6! – ce qui donne encore le même résultat.

Exercice 2.34

b) et c)
Il faut énumérer les combinaisons possibles en termes de nombres de timbres par couleur, en faisant un petit tableau.
Par exemple, dans le cas b) si on ne prend pas de rouge, on peut prendre soit 2 bleus et 2 verts, soit 3 bleus et 1 vert (pas le droit de prendre 4 bleus car il manquerait 2 couleurs dans le choix).
Ensuite, pour chaque combinaison numérique, compter les choix de timbres, et additionner les résultats.

	rouge	bleu	vert			
nombre disponible	3	5	2	nombre de combinaisons		
Une couleur et une seule ne figure pas dans le choix						
pas de rouge		2	2	C(5,2) • C(2,2)	10 • 1	10
		3	1	C(5,3) • C(2,1)	10 • 2	20
pas de bleu	2		2	C(3,2) • C(2,2)	3 • 1	3
	3		1	C(3,3) • C(2,1)	1 • 2	2
pas de vert	1	3		C(3,1) • C(5,3)	3 • 10	30
	2	2		C(3,2) • C(5,2)	3 • 10	30
	3	1		C(3,3) • C(5,1)	1 • 5	5
Total						**100**
Une couleur et une seule ne figure pas dans le choix						
2 rouges	2	1	1	C(3,2) • 5 • 2	3 • 10	30
2 bleus	1	2	1	C(5,2) • 3 • 2	10 • 6	60
2 verts	1	1	2	C(2,2) • 3 • 5	1 • 15	15
						105