Cercle - exercices 1er décembre 2006 – corrigé

Note : dans ces exercices, l'équation encadrée désigne la droite ou le cercle déterminé par l'équation.

1. a) Trouver un cercle de centre C(–2;1) et passant par A(1;1)

Equation du cercle γ avec un paramètre inconnu : $x^2 + y^2 + 4x - 2y + c = 0$

$$A \in \gamma \;\rightarrow\; 1^2 + 1^2 + 4 \bullet 1 - 2 \bullet 1 + c = 0 \;\rightarrow\; c = -5 \;\rightarrow\; \text{cercle } \boxed{x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0}$$

b) Trouver un cercle de même centre et tangent à la droite d = $\boxed{4x + 3y - 20}$

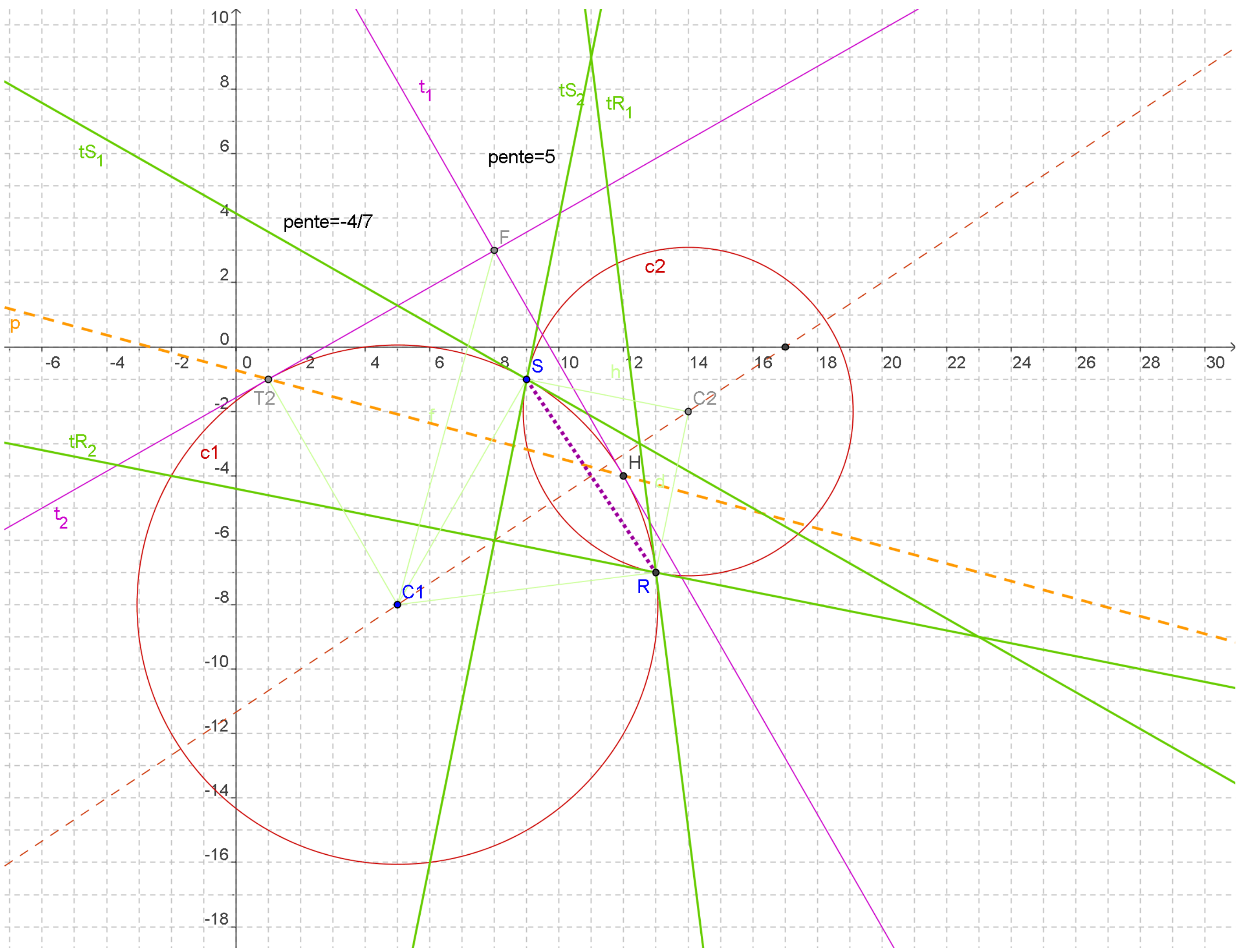
Le rayon du cercle est la distance du centre à la droite :

$$r \;=\; \delta(C, d) \;=\; \left[\left|\frac{4x+3y-20}{5}\right|\right]_{\substack{x=-2\\ y=1}} \;=\; \left|\frac{-25}{5}\right| \;=\; 5$$

$$\text{Cercle} = \boxed{(x-2)^2 + (y+1)^2 \;=\; 25}$$

2. Données

$$\gamma_1 \;=\; \boxed{x^2 + y^2 - 10x + 16y + 24 = 0} \qquad\qquad \gamma_2 \;=\; \boxed{x^2 + y^2 - 28x + 4y + 174 = 0}$$



Elements à trouver ou calculer :

a) Centres et rayons de ces cercles

γ_1 : centre $(5;-8)$; rayon $=?$	γ_2 : centre $(14;-2)$; rayon $=?$
$(x-5x)+(y+8) = r^2$	$(x-5x)+(y+8) = r^2$
$x^2+y^2-10x+16y+\underbrace{25+64-r^2}_{=24}=0$	$x^2+y^2-28x+4y+\underbrace{196+16-r^2}_{=174}=0$
$x^2+y^2-10x+16y+24 \ldots\ldots\ldots = 0$	$x^2+y^2-28x+4y+174\ldots\ldots = 0$
$r^2 = 25+64-24 = 65 \quad r_1=\sqrt{65}$	$r^2 = 196+16-174 = 38 \quad r_2=\sqrt{38}$

b) Intersection des cercles

$$\begin{array}{l|l} x^2+y^2-10x+16y+24=0 & +1 \\ x^2+y^2-28x+4y+174=0 & -1 \end{array}$$

Par soustraction, on trouve

$18x+12y-150=0$

$3x+2y-25=0$

$y=\dfrac{25-3x}{2}$

Substituons dans une des équations du 2[e] degré

$$x^2+\left(\frac{25-3x}{2}\right)^2-10x+16\left(\frac{25-3x}{2}\right)+24=0$$

Multiplions par 4 pour éliminer les fractions

$4x^2+(25-3x)^2-40x+32(25-3x)+96=0$

$13x^2-286x+1521 = 0$ ... ça se divise par 13!!

$x^2-22x^2+117 \quad \rightarrow \quad \Delta=22^2-4\bullet117=16$

$\sqrt{16}=4$; solutions $x=\dfrac{22\pm4}{2}=\left\langle\begin{matrix}13\\9\end{matrix}\right. \rightarrow \mathrm{y}=\left\langle\begin{matrix}-7\\-1\end{matrix}\right.$

Les points d'intersection sont $R(13,7)$ et $S(9,\text{-}1)$

> Note: connaissez-vous la formule simplifiée quand b est pair dans l'équation $ax^2+bx+c = 0$?
>
> En posant $b=2b'$, la formule $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ se simplifie en $\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$ $(\Delta'=b'^2-ac)$
>
> Dans le cas ci-dessus, on a alors: $\Delta'=b'^2-ac$, puis $x=\dfrac{11\pm2}{1}=\left\langle\begin{matrix}13\\9\end{matrix}\right.$

c) Tangentes en un des points d'intersection

Les tangentes sont les polaires en R et S. On les trouve avec les équations canoniques des cercles:

$\gamma_1 = \boxed{(x-5)^2+(y+8)^2 = 65}$	$\gamma_2 = \boxed{(x-14)^2+(y+2)^2 = 26}$
Tangente en $R(13,-7)$:	Tangentes en $R(13,-7)$
$(\underbrace{13-5}_{8})(x-5)+(\underbrace{-7+8}_{1})(y+8) = 65$	$(\underbrace{13-14}_{-1})(x-14)+(\underbrace{-7+2}_{-5})(y+2) = 26$
$8x+y\underbrace{-40+8-65}_{-97}=0 \rightarrow \mathrm{t}_{R1} = \boxed{8x+y-97=0}$	$-x-5y\underbrace{+14-10-26}_{-22}=0 \rightarrow \mathrm{t}_{R2} = \boxed{x+5y+22}$
Tangente en $S(9,-1)$:	Tangente en $S(9,-1)$:
$(\underbrace{9-5}_{4})(x-5)+(\underbrace{-1+8}_{7})(y+8) = 65$	$(\underbrace{9-14}_{-5})(x-14)+(\underbrace{-1+2}_{1})(y+2) = 26$
$4x+7y\underbrace{-20+56-65}_{-29}=0 \rightarrow \mathrm{t}_{S1} = \boxed{4x+7y-29=0}$	$-5x+y\underbrace{+70+2-26}_{-46}=0 \rightarrow \mathrm{t}_{S2} = \boxed{5x-y-46=0}$

d) Angles de ces tangentes

Calcul des angles à partir des pentes de ces droites (la pente est la tangente de l'angle ; utiliser la fonction Arctan (2nd+TAN - parfois notée TAN^{-1}), et calculer en degrés.

Pentes et angles : $t_{R1} : m_{R1} = -8 \;\rightarrow\; \alpha_{R1} = -82.87°$ $\qquad t_{R2} : m_{R2} = -\dfrac{1}{5} \;\; \alpha_{R1} = -11.31°$

L'angle entre les deux droites est la différence des angles, soit 71.56°

C'est l'angle sous lequel se coupent les deux cercles, et le calcul en un point suffit.

Vérification avec l'autre point :

Pentes et angles : $t_{S1} : m_{S1} = -\dfrac{4}{7} \;\rightarrow\; \alpha_{R1} = -29.74°$ $\qquad t_{S2} : m_{S2} = 5 \;\; \alpha_{R1} = 78.69°$

L'angle entre les deux droites est la différence des angles, soit 108.43°....

Pourquoi pas la même valeur ? C'est simplement l'angle supplémentaire :

$71.56° + 108.43° = 179.99° \cong 180°$ aux arrondis près

(Il y a toujours deux valeurs supplémentaires de l'angle entre deux droites, l'un aigu, l'autre obtus. Suivant par où on prend le calcul, on trouve l'un ou l'autre...

e) Longueur de la corde

$$\overline{RS} = ? \qquad \left\| \begin{pmatrix} 13-9 \\ -7-(-1) \end{pmatrix} \right\|^2 = 4^2 + 6^2 = 52 \;\rightarrow\; \overline{RS} = \sqrt{52} \cong 7.21$$

f) Position de l'axe des x par rapport au 1er cercle

Intersection de l'axe des $Ox = \boxed{y=0}$ avec le cercle $\gamma_1 = \boxed{(x-5)^2 + (y+8)^2 = 65}$:

Cela donne, par substitution, $(x-5)^2 + 64 = 65, \;\Leftrightarrow\; (x-5)^2 = 1, \;\Leftrightarrow\; (x-5) = \pm 1$

Cette équation a deux solutions, donc l'axe Ox coupe le cercle.

(Ici, on peut se passer de calculer le discriminant pour vérifier si l'équation du second degré trouvée a 2, 1 ou 0 solutions, puisqu'elle se résout si simplement...

Si on avait remplacé y par 0 dans l'équation cartésienne donnée au départ,

$x^2 + y^2 - 10x + 16y + 24 = 0$, on aurait trouvé $x^2 - 10x + 24 = 0$...)

g) Tangentes au premier cercle issues du point F(8;3)

$\gamma_1 = \boxed{(x-5)^2 + (y+8)^2 = 65}$

Polaire en $F(8,3)$:

$(\underbrace{8-5}_{3})(x-5) + (\underbrace{3+8}_{11})(y+8) = 65$

$3x + 11y \underbrace{-15 + 88 - 65}_{+8} = 0 \rightarrow p = \boxed{3x + 11y + 8 = 0}$

Cherchons les points d'intersection avec le cercle

$x = \dfrac{-11y-8}{3} \xrightarrow[\text{substitution}]{} \left(\dfrac{-11y-8}{3} - 5\right)^2 + (y+8)^2 = 65$

Multiplions par 9 (par 3 à l'intérieur des parenthèses) pour éliminer les fractions...

$\underbrace{(-11y-8-15)^2}_{\substack{-11x-23 \\ -(11x+23)}} + 9(y+8)^2 - 585 = 0$

$(\underbrace{121+9}_{130})y^2 + (\underbrace{506+144}_{650})y + (\underbrace{529+576-585}_{520}) = 0$

$13y^2 + 65y + 52 = 0$ ....simplifier encore par 13...

$\mathrm{y}^2 + 5y + 4 = 0$ .... deux solutions, $y = -4$, $y = -1$

On trouve alors $x = \dfrac{44-8}{3} = 12$, $x = \dfrac{11-8}{3} = 1$

Les points de tangence sont alors $T_1(12,-4)$, $T_2(1,-1)$

On trouve maintenant les équations des tangentes en prenant les polaires de ces deux points :

$p_1 : \; 7(x-5) + 4(y+8) = 65 \rightarrow p_1 = \boxed{7x + 4y - 68 = 0}$

$p_2 : \; -4(x-5) + 7(y+8) = 65 \rightarrow p_1 = \boxed{4x - 7y + 11 = 0}$

h) Position du point $P(-7;14)$ par rapport aux cercles – ou $Q(10;-5)$

On peut calculer la distance entre les points $P(-7;14)$ et $Q(10,-5)$ et les centres des cercles.
En fait, il suffit de calculer le carré de cette distance et de le comparer au carré du rayon

$\delta(P,C_1)^2 = (-7-5)^2+(14+8)^2 = 144+484 > 65$ ... $\to$ le point est à l'extérieur du cercle γ_1

$\delta(P,C_2)^2 = (-7-14)^2+(14+2)^2 = 441+256 > 26$ ... $\to$ le point est à l'extérieur du cercle γ_2

$\delta(\mathrm{Q},C_1)^2 = (10-5)^2+(-5+8)^2 = 25+9 < 65$ ... $\to$ le point est à l'intérieur du cercle γ_1

$\delta(\mathrm{Q},C_1)^2 = (10-14)^2+(-5+2)^2 = 16+9 = 25 < 26$ ... $\to$ le point est à l'intérieur du cercle γ_2

Remarque :
Il suffit de remplacer *x* et *y* par les coordonnées du point dont on recherche la position par rapport au cercle dans le premier membre de son équation
soit sous la forme $(x-5)^2+(y+8)^2-65=0$, soit sous la forme équivalente $x^2+y^2-10x+16y+24=0$,
On trouve un nombre > 0 si le point est à l'extérieur, = 0 si le point est sur le cercle, < 0 s'il est à l'intérieur.
Rappel de l'interprétation géométrique : le nombre trouvé en remplaçant ainsi est la quantité d^2-r^2, où d est la distance du point au centre du cercle et *r* le rayon du cercle.

3. Données : Droite $d = \boxed{4x-3y+9=0}$ $\qquad P(3,5)$

On cherche un cercle de rayon 10 tangent à *d*

a) Le centre du cercle doit être à une distance 10 de la droite. Il doit dont être sur l'une des deux droites parallèles à *d* à cette distance. Recherchons cette droite.

On trouve un point quelconque sur la droite: par exemple A(0;3).

On construit un vecteur normal de la droite: $\vec{n}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$. Ce vecteur est de longueur 5.

Ecrivons les coordonnées en ligne pour faciliter... $\vec{n}=(4\ 3)$

Il suffit de le multiplier par 2 pour obtenir un vecteur de longueur 2: $\vec{m}=(8\ \ 6)$

On peut maintenant construire deux points dont la distance à la droite d vaut 10,
en «ajoutant» ou «soustrayant» le vecteur $\vec{m}$ au point A.

$(0\ \ 3)+(8\ \ -6)=(8\ \ -3) \qquad (0\ \ 3)-(8\ \ -6)=(-8\ \ 9)$

On a les points $B(8\ \ -3)$ et $C(-8\ \ -3)$, et on peut prendre les parallèles à d

$\underbrace{4x-3y}_{32+9}+...=0 \to d_1=\boxed{4x-3y-41=0} \qquad \underbrace{4x-3y}_{-32-27}+...=0 \quad d_2=\boxed{4x-3y+59=0}$

Remarque qui raccourcit les calculs...
En fait, il suffit tout simplement de prendre l'équation sous la forme normale,
car son premier membre correspond à la distance d'un point de coordonnées $(x;y)$ à la droite.

$$4x-3y+9 \underset{\text{forme normale}}{\to} \frac{4x-3y+9}{5} \begin{cases} \dfrac{4x-3y+9}{5}+10=0 \Leftrightarrow 4x-3y+59=0\ (d_2) \\ \dfrac{4x-3y+9}{5}-10=0 \Leftrightarrow 4x-3y-41=0\ (d_1) \end{cases}$$

b) Maintenant, on peut chercher le centre *C* en remarquant que puisque le cercle passe par le point donné *P*, *P* est à une distance 10 de *C*, donc *C* est aussi à une distance 10 de *P*.
C est donc situé sur un cercle de rayon 10 centré en *P*. On trouve donc le centre en construisant un cercle de rayon 10 centré en *P* et en cherchant où il coupe l'une des droites trouvées ci-dessus.

Cercle de rayon 10 centré en P: $\boxed{(x-3)^2+(y+5)^2=100}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{x^2+y^2-6x+10y-66=0}$

Intersection de ce cercle avec l'une des droites $d_1 = \boxed{4x-3y-41=0}$ et $d_2 = \boxed{4x-3y+59=0}$

En fait, il n'y en a qu'une qui fournit des points. (Le dessin permet de voir qu'il s'agit de d_1, car le P est à droite de d, et le vecteur utilisé est aussi tourné vers la droite.

(Si on ne le voit pas, on peut toujours se fatiguer à faire les calculs dans les deux cas ......)

$$d_1 \to y=\frac{4x-41}{3}=0 \;\to\; x^2+\left(\frac{4x-41}{3}\right)^2-6x+10\bullet\frac{4x-41}{3}-66=0$$

$$\to 9x^2+(4x-41)^2-54x+30(4x-41)-594=0 \quad\Leftrightarrow\quad 25x^2-262x-143=0$$

$$\Delta'=b'^2-ac \qquad \Delta'=131^2+143\bullet 25=20736=144^2 \quad\to\text{ solutions : } x=\frac{-131\pm 144}{25}=\left\langle \begin{matrix} 13/25 \\ 11 \end{matrix}\right.$$

Les valeurs correspondantes de y sont $\dfrac{\frac{52}{25}-41}{3}=\dfrac{52-1025}{75}=\dfrac{-973}{75}=-12.97\overline{3}$ et $\dfrac{44-41}{3}=1$

Les centres des cercles cherchés sont donc $C_1\,(1;11)$ et $C_2\,(\frac{13}{25};\frac{-973}{75})$

Equations des cercles cherchés: $(x-11)^2+(y-1)^2=100$ et $\left(x-\frac{13}{25}\right)^2+\left(y+\frac{973}{75}\right)^2=100$

Cette seconde équation peut se mettre sous la forme (en multipliant par 75^2 pour supprimer les fractions) d'une équation cartésienne à coefficients entiers: $5625x^2+5625y^2-5850x+145950y+385750=0$

(Note : si on demande *un* cercle, il suffit de donner le plus simple)