Analyse 3M standard

Corrigés de quelques exercices p. 16 (1) - 17 (2)

1. Dériver le membre de droite de l'égalité pour vérifier qu'on retrouve bien la fonction sous le signe d'intégrale à gauche

a) $\dfrac{-2}{x^3\sqrt{x}} = -2x^{\frac{-7}{2}}$ dérivons : $(-2x^{\frac{-7}{2}})' = (-2)\bullet\frac{-7}{2}\bullet x^{\frac{-9}{2}} = 7\bullet x^{\frac{-9}{2}} = \dfrac{7}{\sqrt{x^9}}$

b) appliquer la règle de dérivation d'un quotient :

$$(\frac{2x^2-1}{2-x^2})' = \frac{4x\bullet(2-x^2)-(2x^2-1)\bullet(-2x)}{(2-x^2)^2} = \frac{6x}{(2-x^2)^2}$$

c) $(\dfrac{2x}{\sqrt{x+1}})' = (2x(x+1)^{-1/2})' = 2\bullet(x+1)^{-1/2} + 2x\bullet(-\frac{1}{2})\bullet(x+1)^{-3/2} = \left[2\bullet(x+1)+(-x)\right]\bullet(x+1)^{-3/2} =$

$= (x+2)\bullet(x+1)^{-3/2} = \dfrac{(x+2)}{\sqrt{(x+1)^3}}$

Note : pour cet exercice, il est plus facile de mettre la fraction sous forme d'un produit avec exposant fractionnaire négatif, d'appliquer la formule de dérivation d'une produit, puis, après avoir calculé la dérivée, de mettre en évidence le facteur avec l'exposant -3/2, et finalement de revenir à une fraction et à des racines à la fin. On peut aussi travailler en restant sur une fraction et en appliquant la formule de dérivation d'un quotient.

e) - f) Décomposer en une somme de termes.

g) Mettre sous forme de produit avec exposant fractionnaire, dériver, puis mettre les facteurs d'exposant minimum en évidence, et finalement revenir à une forme avec fraction et racines.

$F(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} = (x-1)^{\frac{1}{2}}(x+1)^{\frac{-1}{2}}$ dériver, puis mettre en évidence...

$F'(x) = [\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}]\bullet(x+1)^{\frac{-1}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{2}}\bullet[\frac{-1}{2}(x+1)^{\frac{-3}{2}}] = \frac{1}{2}\bullet[(x+1)-(x-1)]\bullet(x+1)^{-\frac{1}{2}}(x-1)^{\frac{-3}{2}} = 1\bullet(x+1)^{-\frac{1}{2}}(x-1)^{\frac{-3}{2}} =$

$= (x+1)^{-\frac{1}{2}}(x-1)^{\frac{-1}{2}}(x-1)^{-1} = [(x+1)(x-1)]^{-\frac{1}{2}}(x-1)^{-1} = (x^2-1)^{-\frac{1}{2}}(x-1)^{-1} = \dfrac{1}{(x-1)\sqrt{(x^2-1)}}$

h) mettre sous la forme d'exposant fractionnaire et ne pas oublier de multiplier par la dérivée intérieure (dérivée du trinôme du 2^{e} degré

2. Pour ces exercices, on applique la formule $\int ax^n dx = \dfrac{ax^{n+1}}{n+1} + C$

3. Même chose en remplaçant les racines par des exposants fractionnaires et les facteurs sous la barre de fraction par des exposants négatifs

4. g) Avec le facteur *x,* qui est proportionnel à la dérivée de la parenthèse (dérivée intérieure), on peut prévoir que la primitive est de la forme $F(x) = a(4x^2+3)^5 + C$.

Dérivons...: $[(4x^2+3)^5]' = 5\bullet(4x^2+3)^4\bullet 8x = 40x(4x^2+3)^4$

Il faut donc rediviser par le facteur 40 (a = $\dfrac{1}{40}$), et on aura $F(x) = \dfrac{(4x^2+3)^5}{40} + C$

Les exercices f), 5. o) et p), par exemple se résolvent au moyen du même principe

5. b) Il faut simplement effectuer l'addition des termes en mettant tout sous forme de monômes à exposants positifs ou négatifs (réponse donnée ici sous une forme différente mais équivalente à celle du fascicule)

$$\int \frac{3x^4-3x^2-7}{4x^2}dx = \int \tfrac{1}{4}\left(3x^2-3-7x^{-2}\right)dx = \tfrac{1}{4}(x^3-3x-\tfrac{7}{-1}x^{-1})+C = \tfrac{1}{4}(x^3-3x+7x^{-1})+C =$$

$$= \frac{x^4-3x^2+7}{4x}+C$$ (ce qui revient au même que la réponse du fascicule, $\tfrac{1}{4}x^3-\tfrac{3}{4}x+\dfrac{7}{4x}+C$)

m) Ici il faut aussi passer par les exposants fractionnaires

$\int \sqrt[3]{(3x-8)^2}\,dx = \int (3x-8)^{2/3}dx = F(x)$ La primitive devrait être de la forme $F(x) = a(3x-8)^{5/3}+C$

Or $\left((3x-8)^{5/3}\right)' = \dfrac{5}{3}(3x-8)^{2/3}\bullet 3 = 5(3x-8)^{2/3}$; il faut donc diviser par 5 pour obtenir la solution

$$F(x) = \frac{(3x-8)^{2/3}}{5}+C = \frac{\sqrt[3]{(3x-8)^2}}{5}+C$$

6. d) On a deux constantes à chercher et deux conditions données pour les trouver

$$f''(x)=(x+1)(x-2)=x^2-x-2 \rightarrow f'(x) = \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C \rightarrow f(x) = \frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{6}-x^2+Cx+D$$

$f(1)=8$ *et* $f(-1)=-4$ fournit un système de deux équations permettant de déterminer C et D

$$\left\{\begin{matrix} \frac{1}{12}-\frac{1}{6}-1+C+D=8 \\ \frac{1}{12}+\frac{1}{6}-1-C+D=-4 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} \frac{1}{6}-2+2D=4 & \rightarrow & 2D=6-\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6}-2C=12 & & 2C=-12-\frac{1}{6} \end{matrix}\right\} \rightarrow C=-\frac{37}{12}\ ;\ D=\frac{35}{12}$$

9. L'asymptote d'une telle fonction est donnée par la partie de la fonction qui tend vers zéro à l'infini, donc dans ce cas par la partie qui est sous la forme d'une fraction rationnelle avec un polynôme au dénominateur et un nombre au numérateur (plus généralement, un polynôme de plus grand degré au dénominateur qu'au numérateur)

$$f''(x)=\frac{-8}{x^3}=-8x^{-3} \rightarrow f'(x)=\frac{-8x^{-2}}{-2}+C = 4x^{-2}+C \rightarrow f(x)=-4x^{-1}+Cx+D = Cx+D-\frac{4}{x}$$

L'asymptote d'une telle fonction est justement $f_0(x)=Cx+D$;

L'équation de l'asymptote donnée, $x-2y=-8$, équivaut à $y=\tfrac{1}{2}x+4$;

la solution cherchée est donc $f(x)=\tfrac{1}{2}x+4-\dfrac{4}{x} = \dfrac{x^2+8x-8}{2x}$