

OS – Théorie des nombres – Quelques solutions

Ex. 1.3 – Cette affirmation peut se démontrer par l’absurde (et elle suppose traités les exercices ci-dessous, plus simples)

- Si aucun des deux nombres a et b n’était pair, ces deux nombres seraient alors tous deux impairs et s’écriraient donc sous la forme $a = 2m + 1$; $b = 2n + 1$.

$$\text{On aurait alors } a^2 + b^2 = 4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 + 4n + 1 = \underbrace{4m^2 + 4m + 4n^2 + 4}_{\text{multiple de 4}} + 2 =$$

$$4k + 2.$$

Le nombre $c^2 = a^2 + b^2$ serait ainsi un multiple de 4 plus 2.

- Cela impliquerait en particulier que c soit un nombre pair, sinon son carré ne pourrait être pair. Dans ce cas, on peut écrire $c = 2l$, donc $c^2 = 4l^2$, et c^2 est un multiple de 4, ce qui contredit le fait que c^2 soit un multiple de 4 plus 2.
- Il est donc impossible que a et b soient tous deux impairs. L’un des deux au moins est donc pair. CQFD

Ex. 1.5 et 1.6 : la démonstration de ces propriétés est quasi-évidente et est supposée dans la démonstration précédente.

Algébriquement, elle se fait en observant que les nombres pairs ou impairs s’écrivent respectivement sous la forme $2k$ et $2k + 1$ (avec k entier). Il est plus simple de traiter ces deux propriétés ensemble.

- Le carré d’un nombre pair est pair, car le carré d’un multiple de 2 est un multiple de 4. (Algébriquement, un nombre pair s’écrit sous la forme $n = 2k$, et son carré vaut $n^2 = 4k^2 = 2 \cdot 2k^2$: c’est un nombre pair).
- Un nombre impair s’écrit sous la forme $n = 2k + 1$. Son carré vaut alors $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1 = 2 \cdot [2(k^2 + k)] + 1$, qui est aussi un nombre impair. Ce calcul montre que le carré d’un nombre impair est non seulement un nombre impair, mais doit être un multiple de 4 plus 1. (Il ne peut jamais être un multiple de 4 plus 3).
- Ainsi donc, le carré d’un nombre pair est pair, et le carré d’un nombre impair est impair.
- Donc un nombre et son carré ont la même parité, et si le carré d’un nombre est pair ou impair, le nombre lui-même est également respectivement pair ou impair. CQFD