

Quadrilatères et milieux

Situation

Dessiner sur de papier quadrillé un quadrilatère $ABCD$ donné par la figure ci-contre

(une unité = deux carrés). Le point O est l'origine du système de coordonnées.

On pose alors

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \overrightarrow{OA} \\ \vec{b} &= \overrightarrow{OB} \\ \vec{c} &= \overrightarrow{OC} \\ \vec{d} &= \overrightarrow{OD}\end{aligned}$$

1. Observation géométrique

On construit successivement :

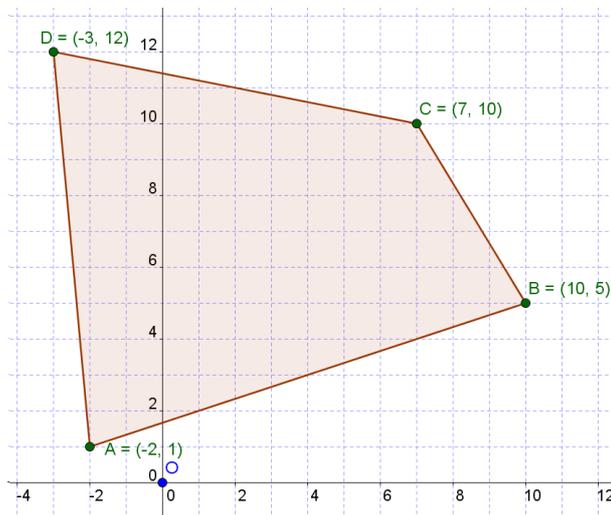
Les milieux E et F des côtés AB et CD

Les milieux G et H des côtés BC et AD

Les milieux I et J des diagonales AC et BD

Les segments EF , GH , IJ .

Que constate-t-on ?



2. Calcul vectoriel

En utilisant la règle « milieu = moyenne », exprimer en fonction des vecteurs \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , et \vec{d} les vecteurs suivants : \overrightarrow{OE} , \overrightarrow{OF} , \overrightarrow{OG} , \overrightarrow{OH} , \overrightarrow{OI} , et \overrightarrow{OJ} .

Ensuite, posons P = milieu de EF , Q = milieu de GH , et R = milieu de IJ

Calculer alors les vecteurs suivants : \overrightarrow{OP} , \overrightarrow{OQ} , \overrightarrow{OR} . Que constate-t-on ?

3. Conclusion géométrique

Énoncer un théorème géométrique qui résulte de ces observations et de ce calcul.