A

2M05 — Test analyse 9.06.2009

corrigé

1. Calculer les dérivées des fonctions définies par les expressions suivantes

a) $f(x) = (2x+4)^5$ $\quad f'(x) = 5\cdot(2x+4)^4\cdot 2 = 10\cdot(2x+4)^4$

b) $f(x) = (5-x)^4$ $\quad f'(x) = 4(5-x)^3\cdot(-1) = -4(5-x)^3$

c) $f(x) = \frac{1}{(x+3)^3}$ $\quad f'(x) = (-3)\cdot(x+3)^{-4} = -3(x+3)^{-4}$

$= (x+3)^{-3}$ $\qquad = \dfrac{-3}{(x+3)^4}$

d) $f(x) = \frac{2}{(4-x)^4}$ $\quad f'(x) = 2\cdot(-4)(4-x)^{-5} = \dfrac{-8}{(4-x)^5}$

$= 2\cdot(4-x)^{-4}$

e) $f(x) = \sqrt{2x^2-1}$ $\qquad$ B) $f(x) = (2x^2-1)^{1/2}$

A) $f'(x) = \dfrac{4x}{2\sqrt{2x^2-1}} = \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2-1}}$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{2}\cdot(2x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 4x = \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2-1}}$

f) $f(x) = (2x^2+3)^3(1-x)^2$ (réponse sous forme factorisée)

$f'(x) = [3\cdot(2x^2+3)^2\cdot 4x]\cdot(1-x)^2 + (2x^2+3)^3\cdot[2\cdot(1-x)^2\cdot(-1)]$

$= [(2x^2+3)^2\cdot(1-x)]\cdot[\underbrace{3\cdot 4x\cdot(1-x) + (2x^2+3)\cdot 2\cdot(-1)}]$

$12x(1-x) - 2(2x^2+3) = 12x - 12x^2 - 4x^2 - 6$

$= -16x^2 + 12x - 6$

$= -2(8x^2-6x+3)$

Donc

$f'(x) = -2(8x^2-6x+3)(2x+3)^2(1-x)$

$= 2(8x^2-6x+3)(2x+3)^2(x-1)$

g) $f(x) = \sqrt{(x^2+1)^5}$ $\quad f'(x) = \frac{5}{2}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\cdot 2x = 5x(x^2+1)^{3/2}$

$= (x^2+1)^{5/2}$ $\qquad = \dfrac{5x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$

h) $f(x) = \frac{3x^2+5}{2x-3}$

(réponse sous forme de fraction rationnelle, factorisée au mieux)

$f'(x) = \dfrac{6x(2x-3) - (3x^2+5)\cdot 2}{2x-3} = \dfrac{2(3x^2-9x-5)}{2x-3}$

Num $= 12x^2 - 18x - 6x^2 - 10$

$= 6x^2 - 18x - 10 = 2(3x^2-9x-5)$

B

2M05 — Test analyse 9.06.2009

corrigé

1. Calculer les dérivées des fonctions définies par les expressions suivantes

a) $f(x) = (3x-5)^4$ $\quad f'(x) = 4(3x-5)^3 = 12(3x-5)^3$

b) $f(x) = (4-x)^5$ $\quad f'(x) = 5(4-x)^4 \cdot (-1) = -5(4-x)^4$

c) $f(x) = \frac{1}{(x+2)^4}$ $\quad f'(x) = -4(x+2)^{-5} = \frac{-4}{(x+2)^5}$

$= (x+2)^{-4}$

d) $f(x) = \frac{3}{(5-x)^3}$ $\quad f'(x) = 3 \cdot (-3) \cdot (5-x)^{-4} \cdot (-1) = 9(5-x)^{-4}$

$= 3(5-x)^{-3}$ $\quad = \frac{9}{(5-x)^4}$

e) $f(x) = \sqrt{3x^2+1}$

B) $f(x) = (3x^2+1)^{1/2}$

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (3x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 6x = 3x(3x^2+1)^{-1/2}$

$= \frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}$

A) $f'(x) = \frac{6x}{2\sqrt{3x^2+1}} = \frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}$

f) $f(x) = (3x^2+2)^2(1-x)^3$ (réponse sous forme factorisée)

$f'(x) = [2(3x^2+2) \cdot 6x](1-x)^3 + (3x^2+2)^2[3 \cdot (1-x)^2 \cdot (-1)]$

$= (3x^2+2)(1-x^2)\left[\underbrace{2 \cdot 6x \cdot (1-x) + (3x^2+2) \cdot 3 \cdot (-1)}\right]$

$12x(1-x) + (3x^2+2)(-3) = 12x - 12x^2 - 9x^2 - 6$

Donc $\quad = -21x^2 + 12x - 6 = -3(7x^2 - 4x + 2)$

$f'(x) = -3(3x^2+2)(1-x^2)(7x^2-4x+2)$

g) $f(x) = \sqrt{(x^2-1)^7}$ $\quad f'(x) = \frac{7}{2}(x^2+1)^{5/2} \cdot 2x = 7x(x^2+1)^{5/2}$

$= (x^2-1)^{7/2}$ $\quad = 7x\sqrt{(x^2+1)^5}$

h) $f(x) = \frac{5x^2+3}{2x-1}$ (réponse sous forme de fraction rationnelle, factorisée au mieux)

$f'(x) = \frac{10x \cdot (2x-1) - (5x^2+3) \cdot 2}{(2x-1)^2}$

Num. $= 20x^2 - 10x - 10x^2 - 6$

$= 10x^2 - 10x - 6$

$= 2(5x^2 - 5x - 3)$