

25 août 2009 – Exercices de révision sur la dérivée et ses applications

1. Calculer les dérivées des fonctions définies par les expressions suivantes

a) $f(x) = (3x - 5)^4$

$f'(x) = 12(3x - 5)^3$

b) $f(x) = (5 - 2x)^3$

$f'(x) = -6(5 - 2x)^2$

c) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^4}$

$f'(x) = \frac{-4}{(x-1)^5}$

d) $f(x) = \frac{2}{(4-x)^4}$

$f'(x) = \frac{8}{(4-x)^5}$

e) $f(x) = \sqrt{4x^3 - 3}$

$f'(x) = \frac{6x^2}{\sqrt{4x^3 - 3}}$

f) $f(x) = (3x^2 - 1)^3(1 - 3x)^2$ (réponse sous forme factorisée)

$-6(12x^2 - 3x - 1)(3x^2 - 1)^2(1 - 3x) = 6(12x^2 - 3x - 1)(3x^2 - 1)^2(3x - 1)$

g) $f(x) = \sqrt{(x^2 - 1)^3}$

$f'(x) = 3x\sqrt{x^2 - 1}$

h) $f(x) = \frac{x^2 + 2}{1 - 3x}$

$f'(x) = \frac{-(3x^2 - 2x - 6)}{(1 - 3x)^2}$

2. On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{3x-1}{x-1}$

a) Donner l'ensemble de définition $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

b) Calculer les coordonnées des points d'intersection avec les axes

Avec $Oy : x = 0$; avec $Ox : y = 0$, avec pour seule solution $x = \frac{1}{3}$

Voir les coordonnées des points sur le graphique

c) Trouver les asymptotes : calculs de limites

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ (appr. par valeurs inf.) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ (appr. par valeurs sup.)

$\Rightarrow$ asymptote horizontale d'équation $y = 3$, courbe au-dessous à gauche, au-dessus à droite

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0_-$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0_+$

$\Rightarrow$ asymptote verticale d'équation $x = 1$, courbe vers le bas à gauche et vers le haut à droite

d) Calculer la dérivée de cette fonction. $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$

e) Calculer les coordonnées du point d'abscisse 3, l'équation de la tangente en ce point, et dessiner le point et la tangente. $P(3; 4)$; pente $= f'(3) = -\frac{1}{2}$

Equation de la tangente : $y = 4 - \frac{1}{2}(x - 3)$, qui se réduit à $y = \frac{11-x}{2}$

f) Trouver les tangentes au graphe passant par le point $P(5; -1)$

L'équation de la tangente au point d'abscisse a s'écrit : $y = \frac{3a-1}{a-1} + \frac{-2}{(a-1)^2}(x - a)$

(elle se réduit, après quelques calculs, à ceci : $y = \frac{3a^2 - 2a - 2x + 1}{a-1^2}$, mais ce n'est pas indispensable de la réduire ainsi). En remplaçant x par 5 et y par -1, on obtient une équation en a :

$-\frac{3a^2 + 2a + 9}{(a-1)^2} = -1$, qui se réduit après calculs à $\frac{4(a^2 - a - 2)}{(a-1)^2} = 0$. Solutions : $a = -1$ ou $a = +2$, qui sont les abscisses des deux points de tangence. Pentes de ces tangentes : $-\frac{1}{2}$ et -2 .

g) Calculer l'angle que forment ces deux tangentes : on trouve les angles des deux tangentes avec l'horizontale avec la fonction $\arctan$: $\arctan(-2) \cong -63.4^\circ$; $\arctan(0.5) \cong -26.6^\circ$

L'angle entre les deux tangentes est la différence de ces deux angles, 36.8°

h) Etudier le signe de la dérivée de la fonction : qu'en déduisez-vous sur la croissance de la fonction ? Y a-t-il des points où la tangente à la courbe est horizontale ? – La dérivée est toujours négative sur l'ensemble de définition, donc la fonction est toujours décroissante.

i) Dessiner un graphique soigné de cette fonction – Voir le graphique à la page suivante

j) Trouver les deux points de la courbe où la tangente fait un angle de -45° , les indiquer sur le graphique en dessinant également les tangentes.

Un angle de 45° correspond à une pente de -1 . Equation à résoudre : $f'(x) = 1$, qui se réduit à $\frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2} = 0$, équivalant à $x^2 - 2x - 1 = 0$.

Solutions : $x = 1 \pm \sqrt{2} \cong 2.414$ ou -0.414

(les valeurs des abscisses sont un peu compliquées à calculer en valeurs exactes...)

Graphique :
unité = 2 carrés
 $x = -6 \dots 8$
 $y = -4 \dots 10$

