

Probabilités – Notes de résolutions de problèmes

3.24 – Epreuve de Bernoulli

On suppose les prélèvements indépendants. Il s'agit donc d'épreuve de Bernoulli, avec probabilité pour chaque article de 4% d'être défectueux et 96% d'être en ordre.

Probabilité de 0 article défectueux = probabilité 50 articles ok = $B(0, 50, 0.04) = 0.96^{50} \cong 0.1299 = 12.99\%$

Probabilité de 1 article défectueux = $B(1, 50, 0.04) = 50 \cdot 0.04 \cdot 0.96^{49} \cong 0.2706 = 27.06\%$

Probabilité de 2 article défectueux = $B(2, 50, 0.04) = C_2^{50} \cdot 0.04 \cdot 0.96^{48} \cong 0.2762 = 27.62\%$

La somme de ces trois probabilités donne la probabilité de moins de trois articles défectueux. Elle est de $\sim 0.6767 = 67.67\%$, soit environ $\frac{2}{3}$

Probabilité de plus de 4 article défectueux = contraire de 4 articles défectueux ou moins

On a déjà les probabilités de moins de 3 articles défectueux. Il faut ajouter celle pour 3 et 4 articles défectueux.

Probabilité de 3 articles défectueux : $B(3, 50, 0.04) = C_3^{50} \cdot 0.04^3 \cdot 0.96^{47} \cong 0.1842 = 18.42\%$

Probabilité de 4 articles défectueux : $B(4, 50, 0.04) = C_4^{50} \cdot 0.04^4 \cdot 0.96^{46} \cong 0.0902 = 9.02\%$

Probabilité de 4 ou moins : $67.67\% + 18.42\% + 9.02\% = 95.10\%$

La probabilité d'avoir plus de 4 articles défectueux est donc de $1 - 95.10\% = 4.90\%$

4.13 – Probabilité conditionnelle

Univers : le couples de chiffres obtenus (on considère des dés distinguables pour avoir un univers d'issues équiprobables!)

$$a) P(\text{Total} = 6 \mid \text{Chiffres diff.}) = \frac{P(\text{Total} = 6 \text{ avec chiffres diff.})}{P(\text{Chiffres diff.})}$$

Il suffit de compter le nombre d'issues, puisqu'elles sont équiprobables.

« Total = 6 » : 1 + 5 ; 2 + 4 ; 3 + 3 ; 4 + 2 ; 5 + 1 ; : 5 issues, donc 4 seulement avec deux chiffres différents

« Chiffres différents » : 6 possibilités pour un dé, 5 pour l'autre, soit 30 issues.

Probabilité cherchée = $\frac{4}{30} = \frac{2}{15} \cong 13.33\%$

$$b) P(\text{Total} < 5 \mid \text{Chiffres diff.}) = \frac{P(\text{Total} < 5 \text{ avec chiffres diff.})}{P(\text{Chiffres diff.})}$$

« Total < 5 » : on peut les dessiner ou les énumérer : 1 + 1 ; 1 + 2 ; 1 + 3 ; 2 + 1 ; 2 + 2 ; 3 + 1 : 6 issues, donc 4 avec deux chiffres différents

Résultat identique à celui de la question précédente

4.18

a) Tirage des deux pièces indépendants l'un de l'autre. Donc la probabilité que les deux soit ok est le produit des probabilité que chacune le soit : $\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{8}$

b) Une seule pièce défectueuse : soit la première, soit la seconde. $\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{5} + \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{5} = \frac{19}{40} = 47.5\%$

c) Faites un arbre pour plus de clarté... Dans le calcul de b), le premier terme correspond à « Une pièce défectueuse de la boîte A »

$$\text{La probabilité cherchée est donc } \frac{\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{5} + \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{5}} = \frac{9}{19}$$

3.18

Univers formé de tous les groupes de 3 sujets sur 10, soit $C_3^{10} = 120$ issues

Issues favorables : groupes de 3 sujets sur les 5 appris, soit $C_3^5 = 10$

a) Probabilités de tomber sur 3 sujets appris $= \frac{C_3^5}{C_3^{10}} = \frac{10}{120} = 1/12$

b) Le plus simple est de procéder par essais : on calcule $\frac{C_3^6}{C_3^{10}} ; \frac{C_3^7}{C_3^{10}} ; \frac{C_3^8}{C_3^{10}} \dots$ jusqu'à ce qu'on obtienne une probabilité de au moins 0.5. Mais on peut essayer des valeurs intermédiaires pour optimiser le nombre de calculs à effectuer.

On peut aussi poser une inconnue. On a alors à résoudre l'inéquation $\frac{C_3^m}{C_3^{10}} > \frac{1}{2}$

Or $\frac{C_3^m}{C_3^{10}} = \frac{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}{\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6}} = \frac{n(n-1)(n-2)}{720}$

$\frac{C_3^m}{C_3^{10}} > \iff \frac{n(n-1)(n-2)}{720} > \iff n(n-1)(n-2) > 360.$

Là de nouveau, il suffit de procéder par essais, une méthode analytique serait trop compliquée.

On voit que $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336 < 360$, mais que $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$.

Il faut donc au moins avoir appris au moins 9 sujets... et la probabilité de tomber sur trois sujets appris est alors de $\frac{C_3^9}{C_3^{10}} = \frac{84}{120} = \frac{7}{10} = 70\%$

3.19

1. R - $[3/5] \rightarrow U2=3R-3V$

a) R - $[1/2]$ - probabilité finale = $3/10$

b) V - $[1/2]$ - probabilité finale = $3/10$

2. V - $[2/5] \rightarrow U2=4R-2V$

a) R - $[2/3]$ - probabilité finale = $4/15$

b) V - $[1/3]$ - probabilité finale = $2/15$

$P(\text{« boule finale rouge »}) = 3/10 + 2/15 = 17/30$

$P(\text{« boule finale rouge »} \mid \text{« première boule rouge »}) = 1/2$ (se lit sur l'arbre : c'est une probabilité de branche)

$P(\text{« première boule rouge »} \mid \text{« boule finale rouge »}) = \frac{P(\text{les deux boules rouges})}{P(\text{boule finale rouge})} = \frac{3/10}{17/30} = \frac{3 \cdot 30}{10 \cdot 17} = \frac{9}{17}$

