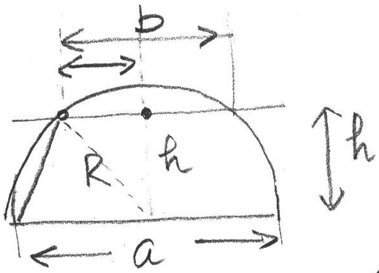
(3.51) Modélisation



$b = 2\cdot\sqrt{R^2-h^2} = 2\sqrt{1-h^2}$

$a = 2R \qquad = 2$

aire du : $h\cdot\underbrace{\left(\frac{2\sqrt{1-h^2}+2}{2}\right)}_{\text{fction à optimiser}}$

Analyse

$f(h) = h\cdot(1+\sqrt{1-h^2})$

$f'(h) = 1\cdot(1+\sqrt{1-h^2}) + h\cdot\left(0+\frac{-2h}{2\sqrt{1-h^2}}\right)$

$= 1+\sqrt{1-h^2} - \frac{h^2}{\sqrt{1-h^2}} = \frac{\sqrt{1-h^2}+(1-h^2)-h^2}{\sqrt{1-h^2}} = \frac{\sqrt{1-h^2}+(1-2h^2)}{\sqrt{1-h^2}}$

$f'(h)=0 \Rightarrow \sqrt{1-h^2}+(1-2h^2)=0 \Leftrightarrow 2h^2-1=\sqrt{1-h^2}$

$\overset{\star}{\Longrightarrow} (2h^2-1)^2 = 1-h^2 \Leftrightarrow 4h^4-4h^2+1-1+h^2=0$

$\boxed{\text{avec } 2h^2-1\geqslant 0}$ $\Leftrightarrow 4h^4-3h^2=0 \Leftrightarrow h^2(4h^2-3)=0$

les zéro sont $h=0$ et $h=\pm\frac{\sqrt3}{2}$

$h=0$ est à éliminer, c'est un zéro ajouté en élevant au carré (la condition $2h^2-1\geqslant0$ élimine ces valeur de h) $\star$

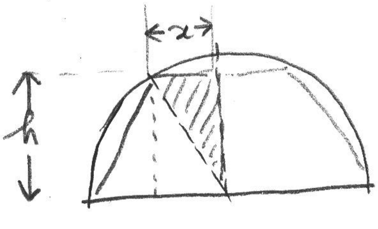
Tableau de variation

h :	$-\frac{\sqrt3}{2}$		$+\frac{\sqrt3}{2}$	
$f'(h)$	0	+	0	−
$f(h)$		↗	MAX	↘

$f'(0) = 1+\sqrt1-0>0$

On a bien un max pour $h=\frac{\sqrt3}{2}$ ... d'où $b=2\sqrt{1-\frac34}=2\sqrt{\frac14}=2\cdot\frac12=\underline{\underline{1}}$

... mais ... un AUTRE CHOIX DE VARIABLE donne des calculs plus simples



alors $b=2x$
$h=\sqrt{1-x^2}$

aire $=\left(\frac{2+2x}{2}\right)\cdot\sqrt{1-x^2}$
$=\underbrace{(1+x)\sqrt{1-x^2}}_{f(x)}$

$f'(x) = 1\cdot\sqrt{1-x^2}+(1+x)\cdot\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} = \frac{(1-x^2)-(1+x)\cdot x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2-x-x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

$=\frac{1-x-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2+x-1=0\\1-x^2\geqslant0\end{cases}$

$\underbrace{2x^2+x-1}_{(2x-1)(x+1)}=0$

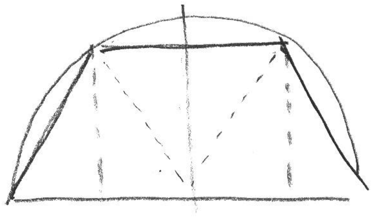
$x=1/2$; $x=-1$ à éliminer

on trouve alors

$x=1/2$

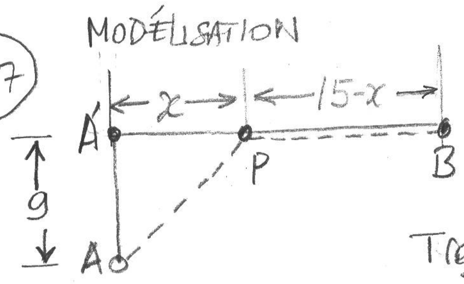
$h=\sqrt{1-1/4}=\sqrt{\frac34}=\frac{\sqrt3}{2}$

Le trapèze trouvé est un demi-hexagone régulier



3.57

MODÉLISATION



Variable : on peut prendre la distance A'P ou PB
il est + simple de choisir A'P

	distance	vitesse	temps = $\frac{\text{dist}}{\text{vitesse}}$
Trajet canot	$\sqrt{x^2+9}$	4	$\frac{\sqrt{x^2+81}}{4}$
à pinces	$15-x$	5	$\frac{15-x}{5}$

Temps de parcours : $\underbrace{\frac{\sqrt{x^2+9}}{4} + \frac{15-x}{5}}_{f(x)}$

C'est la fonction à optimiser (on cherche un minimum)

ANALYSE

$$f'(x) = \frac{1}{4}\,\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+81}} + \frac{1}{5}\cdot(-1)$$

$$= \frac{x}{4\sqrt{x^2+81}} - \frac{1}{5}$$

Zéros de $f'(x)$: $\frac{x}{4\sqrt{☆}} - \frac{1}{5} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{4\sqrt{☆}} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5x = 4\sqrt{☆}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 25x^2 = 16(x^2+81) \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 = 16\cdot 81 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 16\cdot 9 \\ x>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = 4\cdot 3 = 12$

Signes de f' : si $x=0$, $f'(x) = 0 - \frac{1}{5} < 0$
(si x est très grand, on a environ $\frac{1}{4} - \frac{1}{5}$, qui est >0)

Tabl. de variation

x		12	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

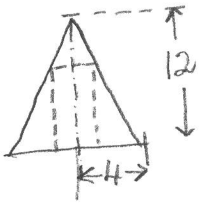
On a bien un MIN en $x=0$

INTERPRÉTATION

- trajet optimum pour P à 12 km de A', donc à 3 km de B
- temps de parcours : $\frac{\sqrt{144+9}}{4} + \frac{3}{5} \cong \dots$ (il n'est pas demandé !)

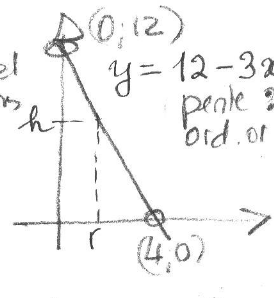
3.56

Modélisation : schéma



Variable : rayon du cylindre $= r$
hauteur du cylindre $= h$
il faut trouver h en fonction de r

Petit ex de géom. anal ou de fonctions ...



$y = 12-3x$
pente : -3
ord. or. : 12

donc on a $\boxed{h = 12-3r}$

A optimiser : le volume du cylindre :

$V = \pi\cdot r^2\cdot h = \underbrace{\pi\cdot r^2\cdot(12-3r)}_{f(r)}$

$\boxed{\text{Analyse}}$: $f'(r) = \pi\left[\underbrace{2r(12-3r) + r^2\cdot(-3)}\right]$

$24r - 6r^2 - 3r^2 = 24r - 9r^2$
$= 3r(8-3r)$

zéro de f' : $r=0$; $r = 8/3$

Variation :

$r=$	...	0	...	8/3	...
$f'(r)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(r)$	$\searrow$	MIN	$\nearrow$	MAX	$\searrow$

à exclure

MAX pour $r = 8/3$
$h = 12-3r = 12-8 = 4$

$\boxed{\text{Interprétation}}$

Vol max pour un rayon de $8/3 \cong 2{,}67$ cm
La hauteur est alors de 4 cm
Le volume $\pi\left(\frac{8}{3}\right)^2\cdot 8$ cm^3 $= \frac{256\pi}{3}$ cm^3 $\cong 89{,}4$ cm^3