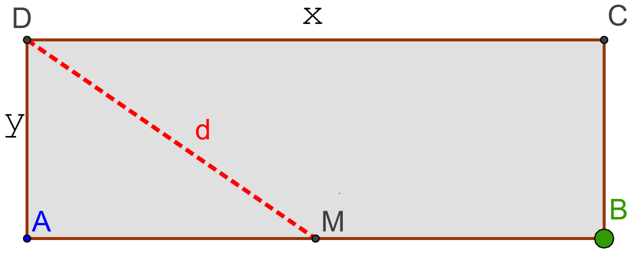
Optimisation – Ex. 3.55

A. Traduction du problème

Variables : dimensions du rectangle x et y
Unités : m et m^2
Comme le rectangle est d'aire donnée fixe, on a

1. $x \cdot y = A = 32$



La distance du sommet au milieu d'un côté non adjacent vaut (théorème de Pythagore) :

2. $d = \sqrt{y^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2}$

L'équation 1. permet de trouver y en fonction de x et de substituer dans 2. :

$$y = \frac{32}{x}; \quad d = \underbrace{\sqrt{\left(\frac{32}{x}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2}}_{f(x)}.$$

On a notre fonction pour laquelle on cherche x qui donne un minimum

B. Étude de variation de la fonction

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{1024}{x^2}} \qquad f'(x) = \frac{\frac{x}{2} - \frac{2048}{x^3}}{\sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{1024}{x^2}}} \qquad \left[\text{avec la formule } \left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}\right]$$

Comme on ne s'intéresse qu'au *signe* de $f'(x)$, et que le dénominateur est forcément positif (lorsqu'il est défini), il suffit d'étudier le signe du numérateur, qui est la dérivée de l'expression $g(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{1024}{x^2}$ apparaissant sous le signe de racine carrée, soit $g'(x) = \frac{x}{2} - \frac{2048}{x^3}$

[On peut aussi observer que cela revient au même de chercher le minimum d'une distance ou de son carré – ce qui permettrait d'éviter de manipuler des racines carrées... mais au bout du compte, cela revient au même]

Pour trouver le zéro de cette expression, on résout l'équation
$\frac{x}{2} = \frac{2048}{x^3}$, qui équivaut à $x^4 = 4096 (= 2^{12})$

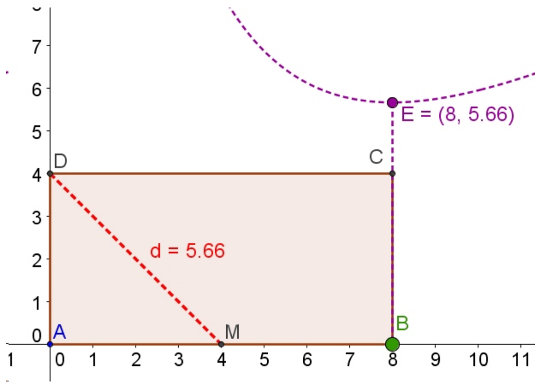
Les solutions sont $x = \pm 8 (= \pm 2^3)$ – seule la valeur positive étant dans le domaine de validité du problème. Limites à l'infini : le terme en x^3 au dénominateur tend vers 0, c'est donc le terme $\frac{x}{2}$ qui domine.

On obtient le tableau de variation ci-contre, qui indique que l'on a un minimum de la fonction f en $x = 8$ et $y = \frac{32}{8} = 4$

	x	$-\infty$		-8		0		8		∞
dér	$g'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	∞
crois.	$g(x)$		$\searrow$	MIN	$\nearrow$	$\Vert$	$\searrow$	MIN	$\nearrow$	0
							domaine de validité			

C. Interprétation

Le minimum est obtenu
pour un rectangle de <u>8 cm × 4 cm</u>
(Généralisation : on obtient un minimum pour un rectangle deux fois plus long que large, et le segment de longueur minimale est la diagonale d'un «demi-rectangle» de forme carrée, faisant donc un angle de 45° avec les côtés)



Voir l'animation GeoGebra <u>ici</u>