Géométrie analytique – Diagonalisation des matrices

Résolution de l'exercice 6.2.2
(avec une méthode raccourcie pour trouver le polynôme caractéristique en dimension 3)

On observe en calculant le déterminant de $M - \lambda \cdot I_3$ que
- Le coefficient de $\lambda^3 = -1$
- Le coefficient de λ^2 est la trace de la matrice
- Pour le coefficient de λ, il suffit de faire la somme des cofacteurs des éléments diagonaux
- Le terme constant est le déterminant de la matrice

Exemple avec l'endomorphisme de l'exercice 6.2.2, de matrice : $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Calcul du polynôme caractéristique

Le déterminant à calculer (en utilisant la variable X) est : $\begin{vmatrix} 3-X & 2 & 1 \\ 1 & 4-X & 1 \\ 1 & 2 & 3-X \end{vmatrix}$

- Coefficient de X^3 : -1
- Coefficient de X^2 : Trace de la matrice (somme des éléments diagonaux) : 3 + 4 + 3 = 10
- Coefficient de X : Somme des cofacteurs des éléments diagonaux, changée de signe
  $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 10 + 8 + 10 = 28$, le coefficient est -28
- Terme constant : le déterminant de la matrice, qui peut se calculer ainsi
  $$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -10 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{soustraire la ligne 2} \\ \text{aux lignes 1 et 3}}} = -1 \cdot \begin{pmatrix} -10 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{(-1) \cdot (-2) \cdot 2}_{\substack{\text{mise en évidence} \\ \text{des facteurs} \\ \text{dans les lignes}}} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 4 \cdot 6 = 24$$

Le polynôme caractéristique est donc : $P(X) = -X^3 + 10X - 28X + 24$

Recherche des valeurs propres

Comme on cherche les zéros, on peut
- Changer de signe et chercher les zéros de $Q(X) = X^3 - 10X + 28X - 24$.
- On les cherche parmi les diviseurs de 24, par essais successifs.
- On voit rapidement que ni 1 ni -1 ne marchent... on se rabat sur 2 et -2 et on trouve...
  $Q(2) = 8 - 40 + 56 - 24 = 0$
- On divise alors $Q(X)$ par $X - 2$, et on trouve un quotient qui se factorise aisément
  $Q(X)/(X-2) = X^2 - 8X + 12 = (X-6) \cdot (X-2)$
- Les valeurs propres sont donc $\lambda_1 = 2$ (avec multiplicité 2) et $\lambda_2 = 6$

Recherche des vecteurs propres

On résout maintenant les équations vectorielles $(M - \lambda_i \bullet I_3)$ (vecteur_?) = 0

1. Pour $\lambda_1 = 2$

$$\begin{pmatrix} 3-2 & 2 & 1 \\ 1 & 4-2 & 1 \\ 1 & 2 & 3-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff x + 2y + z = 0$$

Le système se ramène à une seule équation, et l'espace des solutions est à 2 dimensions (géométriquement, le plan déterminé par l'équation ci-dessus).
On peut en trouver une solution paramétrique en prenant y et z comme paramètres, par exemple, ce qui fournit une base du sous-espaces des vecteurs propres associés.

Cela donne : $y = r$; $z = s$; $x = -2\,y - z = -2\,r - s$.
Vectoriellement :
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et on a une base $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ du sous-espace E_1

Remarque : si on avait trouvé un sous espace E_1 de dimension 1 alors que la valeur propre est de multiplicité 2, l'endomorphisme ne serait pas diagonalisable.

2. Pour $\lambda_2 = 6$

$$\begin{pmatrix} 3-6 & 2 & 1 \\ 1 & 4-6 & 1 \\ 1 & 2 & 3-6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{en combinant la ligne 2} \\ \text{aux lignes 1 et 3}}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Le système se ramène à deux équations à trois inconnues, qui donnent un ensemble de solutions à un paramètre, caractérisant un sous-espace vectoriel de dimension 1 (une droite)

Solution : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et le sous-espace des vecteurs propres, E_2, est engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Note : on peut trouver plus vite cette solution en effectuant le produit vectoriel des deux vecteurs lignes du système ci-dessus !!! – par quel raisonnement ??

Changement de base

L'endomorphisme est représenté par une matrice diagonale dans la base obtenue par changement de base avec comme matrice de passage $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

La nouvelle matrice a les valeurs propres dans la diagonale [1] . $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Interprétation géométrique

Géométriquement, notre endomorphisme peut se décomposer en

- une homothétie de rapport 2, suivie
- d'une affinité laissant fixe les vecteurs du plan E_1 et dilatant d'un facteur 3 les vecteurs de la droite E_2 (ils sont dilatés d'un facteur 2 par l'homothétie, et sont au final dilatés d'un facteur 6).

(Dans ce cas, cette décomposition est commutative, c'est-à-dire qu'on peut aussi bien commencer par l'affinité...)

Cette décomposition peut se représenter matriciellement : $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

---

[1] Pour vérifier, voici l'inverse de la matrice de passage : $P^{-1} = \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$