A

3MR01— Test probabilités 20.05.2009 – corrigé

1. On distribue quatre cartes avec un jeu standard de 36 cartes.On peut raisonner :
① en termes de combinaisons, en considérant globalement les groupes de 4 cartes, ou
② sur des probabilités qui se multiplient en tirant les cartes successivement.

a) Probabilité d'avoir les 4 as : ① une seule combinaisons sur toutes les combinaisons de 4 cartes, soit une probabilité de $\frac{1}{C_4^{36}} = \frac{1}{58905}$ (ici, un pourcentage n'est pas très parlant), ce qui équivaut à ② $\frac{4}{36} \cdot \frac{3}{35} \cdot \frac{2}{34} \cdot \frac{1}{33} = \frac{1}{58905}$

b) Probabilité d'avoir au moins un as : on peut se fatiguer à compter la probabilité d'avoir un, deux, trois ou quatre as. Mieux vaut être «astucieusement paresseux»...

P («au moins 1 as») = 1 – P («aucun as») = ① $1 - \frac{C_4^{32}}{C_4^{36}}$ =
② $1 - \frac{32}{36} \cdot \frac{31}{35} \cdot \frac{30}{34} \cdot \frac{29}{33} = 1 - \frac{35960}{58905} \cong 38.95\%$

2. On jette trois dés.

a) Probabilité d'obtenir trois fois le même chiffre : comme les trois dés sont indépendants, on peut raisonner comme s'il s'agissait de trois jets successifs d'un seul dé. Le premier dé peut avoir n'importe quel chiffre. Les deux suivant doivent avoir le même chiffre que le premier. ➔ probabilité cherchée = $\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36} \cong 2.78\%$

b) Probabilité d'obtenir exactement deux «six» : en choisissant les deux dés donnant un «six» et celui qui donne un autre chiffre, on a une probabilité de $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{72}$ d'obtenir cette combinaison. Comme il y a trois possibilités (qui s'excluent mutuellement) de choisir les deux dés ayant un «six» parmi les trois dés jetés, la probabilité cherchée est : $3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{72} \cong 6.94\%$. NB : c'est une probabilité binomiale, du type $B\left(2; 3; \frac{1}{6}\right) = C_2^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} = 3 \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{5}{72}$

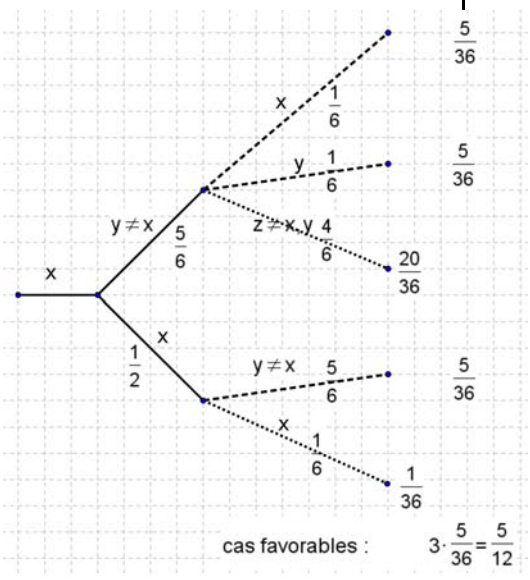
c) Probabilité d'obtenir deux nombres identiques et un troisième différent : on raisonne de manière analogue. Sur deux dés préalablement choisis, la probabilité d'obtenir deux chiffres identiques est de $\frac{1}{6}$. Comme il y a trois manières de choisir lesquels des trois trois dés donnent le même chiffre, la probabilité résultante est de :

$3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{12} = \frac{5}{12} \cong 41.67\%$.
On remarquera que cette probabilité est égale à 6 fois celle du cas précédent.

NB : on peut aussi utiliser la technique des arbres, mais c'est moins satisfaisant, car on perd alors la symétrie de la situation...

Exemple pour 1 c) :

On suppose qu'on tire les dés successivement, ce qui est légitime ! x, y, z désignent les chiffres obtenus sur les trois dés ; le chiffre du premier dé est indifférent, et ce sont les suivants qu'il faut considérer.



A

Nom :

3. On dispose de deux types d'ampoules électriques. Dans les boîtes de type A, 5% des ampoules sont défectueuses, et dans celles de type B, 10% sont défectueuses.
[Voir note ✰]

a) Trois ampoules au hasard dans une boîte de type A : la probabilité qu'elles soient toutes bonnes est : $94\%^3 = 0.94^3 = 0.8306 = 83.06\%$

b) Sur 10 ampoules de type A prises au hasard, la probabilité d'en avoir exactement 3 défectueuses se calcule avec la formule binomiale (épreuve de Bernouilli) :
$B(3, 10, 0.05) = C_3^{10} \cdot 0.06^3 \cdot 0.94^7 \cong 1.681\%$

c) Arbre des issues possibles et de leurs probabilités ci-dessous.

d) Probabilité qu'une ampoule qui se révèle bonne provienne de la boîte A : c'est une probabilité conditionnelle :

$$\text{P(«boîte A» | «bonne ampoule»)} = \frac{\text{P(«boîte A» ET «bonne ampoule»)}}{\text{P(«bonne ampoule»)}}$$

P(«bonne ampoule») = 0.564 + 0.352 = 0.616

«boîte A» ET «bonne ampoule» signifie «avoir une bonne ampoule de type A»

P(«boîte A» ET «bonne ampoule») = 0.475

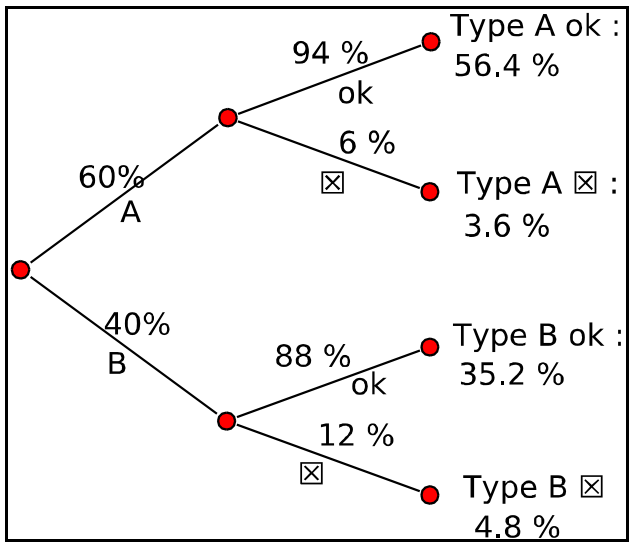
Probabilité cherchée $= \frac{0.564}{0.916} \cong 61.57\%$

Note ✰

Ici, on ne considère pas que chaque boîte de type A contient exactement 5% d'ampoules défectueuses, mais que chaque ampoule prise individuellement a 5% de risque d'être défectueuse, indépendamment des autres ampoules... Donc, si on est déjà tombé sur une ampoule défectueuses, les autres ont toujours le même risque d'être défectueuses.

La proportion de 5% est valable pour un très grand nombre d'ampoules. Sur un petit nombre d'ampoules, on en aura en moyenne 5% de défectueuses, et la proportion constatée peut très bien être plus petite ou plus grande sur un petit échantillon.

Cette simplification ne correspond pas toujours à la réalité ...



A

Nom :

4. Jeu à trois dés, coûtant 1 F pour jouer, puis permettant de regagne 1 F pour un seul six, 10 F pour deux six, et 100 F pour les trois six.

On a une variable aléatoire X avec quatre valeurs possibles, –1, 0, 9, et 99, dont les probabilités sont notées dans le tableau ci-dessous.
Elles correspondent respectivement aux probabilités de tirer 0, 1, 2, ou 3 chiffres six.

On complète les colonnes $X_i \bullet p_i$, X_i^2, $X_i^2 \bullet p_i$ pour effectuer les calculs et trouver l'espérance (≡ gain moyen sur un grand nombre de parties), la variance et l'écart-type.

$$E(X) = \sum_i X_i \cdot p_i$$
$$E(X^2) = \sum_i {X_i}^2 \cdot p_i$$
$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$
$$\text{Ecart-type} = \sqrt{Var(X)}$$

Tableau de valeurs de la variable X = «Gain» – i = nombre de six obtenus						
i	p_i	p_i	X_i	$X_i \bullet p_i$	X_i^2	$X_i^2 \bullet p_i$
0	$\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{5^3}{216} = \frac{125}{216}$	57.87%	–1	0.5787	1	0.5787
1	$3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{3 \cdot 5^2}{216} = \frac{75}{216}$	34.72%	0	0.0000	0	0.0000
2	$3 \cdot \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{3 \cdot 5}{216} = \frac{15}{216}$	6.94%	9	0.6250	81	5.6250
3	$\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$	0.46%	99	0.4583	9801	45.3750
	Total pour vérifier	100.00%	E(X)	1.6620	E(X^2)	51.5787
				variance		48.8163
				écart-type		6.9869

NB : on pourrait aussi calculer les gains sans tenir compte du F dépensé, et soustraire cette valeur de 1 F après le calcul de l'espérance de gain pour obtenir la valeur réelle de. La variance ne change pas par cette opération de «translation»[1]. Appelons Y cette variable «translatée». On obtient alors le tableau suivant :

Tableau de valeurs de la variable Y = «Gain» – i = nombre de six obtenus						
i	p_i	p_i	Y_i	$Y_i \bullet p_i$	Y_i^2	$Y_i^2 \bullet p_i$
0	$\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{5^3}{216} = \frac{125}{216}$	57.87%	0	0,0000	0	0,0000
1	$3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{3 \cdot 5^2}{216} = \frac{75}{216}$	34.72%	1	0,3472	1	0,3472
2	$3 \cdot \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{3 \cdot 5}{216} = \frac{15}{216}$	6.94%	10	0,6944	100	6,9444
3	$\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$	0.46%	100	0,4630	10000	46,2963
	Total pour vérifier	100.00%	E(Y)	1,5046	E(Y^2)	53,5880
				variance		51,3241
				écart-type		7,1641
			E(X)	1,5046 – 1 = 0,5046		

[1] La variance représente la moyenne du carré des écarts à la moyenne. Si toutes les valeurs sont «translatées» d'une certaine quantité, la moyenne est également déplacée de la même quantité. Les écarts à la moyenne ne sont donc pas modifiés par cette «translation. Il s'ensuit que la variance et l'écart-type, qui en est la racine carrée, sont invariants par «translation».