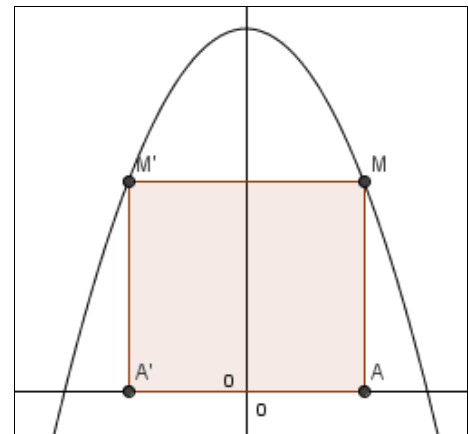


Optimisation – Exercice

On considère une parabole γ d'équation $y = 4 - x^2$, un point mobile $M(t, \dots)$ sur la portion de la parabole située au-dessus de l'axe Ox , et un point $L(5; 5)$.

1. On construit un rectangle $AMM'A'$, où le point A est la projection de M sur l'axe Ox et où A' et M' sont les symétriques de A et M .
Chercher pour quelle position du point M l'aire du rectangle est maximale.
2. Trouver le point M sur la parabole telle que la distance ML soit la plus courte possible. Note : pour ne pas se fatiguer avec des racines carrées, on peut simplement chercher à minimiser le **carré** de la distance ML .
3. a) Calculer la pente de la tangente à γ au point $P(1; 3)$ et écrire l'équation de cette tangente.
b) Montrer que cette tangente est perpendiculaire au segment PL .
c) Voyez-vous le rapport avec la question 2 ?

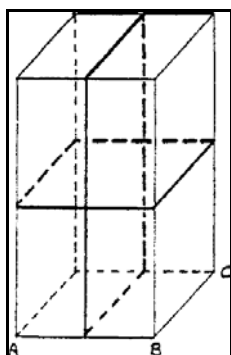


Autres problèmes, tirés de *Analyse 2M standard*, A. Macchi, janvier 2003, p. 74-74

3.43. Une feuille rectangulaire doit contenir 392 cm^2 de texte imprimé. Les marges supérieure et inférieure doivent être de 2 cm chacune ; les marges latérales de 1 cm chacune. Déterminer les dimensions de la feuille nécessitant le moins de papier.

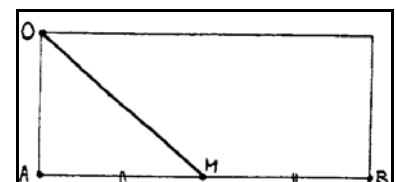
3.51. Incrire dans un demi-cercle de diamètre $AB = 2$, un trapèze $ABCD$ d'aire maximale.

3.53. A midi, le bateau B est situé à 45 milles au nord du bateau C. Le bateau B se dirige vers le sud à la vitesse de 9 nœuds et le bateau C se dirige vers l'ouest à la vitesse de 12 nœuds. A quelle heure les bateaux seront-ils à une distance minimale ? (Rappel: un nœud = un mille par heure)

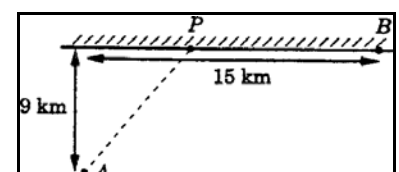


3.54. On se propose d'envoyer un colis de volume égal à 12 dm^3 dont la forme est celle d'un parallélépipède rectangle de base carrée ($AB = BC$). Son emballage est maintenu à l'aide d'une ficelle comme le montre la figure. Trouver les dimensions du colis permettant d'utiliser le moins de ficelle possible.

3.55. Un rectangle doit avoir une aire de 32 m^2 . Préciser ces dimensions sachant que la distance d'un sommet au milieu du côté non adjacent est minimale.



3.57. Le gardien d'un phare (point A) doit rejoindre le plus rapidement possible la maison côtière (point B). Il se déplace en canot à la vitesse de 4 km/h et à pied à la vitesse de 5 km/h. Où doit-il accoster (point P) pour que le temps de parcours soit minimal ? La côte est supposée rectiligne.



Réponses

- 3.43 – 16 cm par 32 cm (verticalement)
 3.51 – Choisir $AD = DC = BC = 1$.
 3.53 – à 1 h 48
 3.54. – $20 \text{ cm} \times 20 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$.
 3.55. – $OA = 4 \text{ m}$ et $AB = 8 \text{ m}$
 3.57. – D doit accoster à 12 km du point de la côte le plus proche du phare.

1) $M(t; 4+t^2)$ sur le graphe

Aire du rectangle:

$$A(t) = 2t(4+t^2) \\ = 8t - 2t^3$$

Max de $A(t)$?

$$A'(t) = 8 - 6t^2$$

$A'(t)$ s'annule pour

$$8t^2 = 8,$$

$$\Leftrightarrow t^2 = \frac{4}{3}, \quad t = \pm \sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$t \quad -\sqrt{\frac{4}{3}} \quad +\sqrt{\frac{4}{3}} \\ A'(t) \quad - \quad 0 \quad + \quad 0 \quad -$$

$A(t) \searrow \nearrow \text{max} \searrow$

Maximum pour $t=1$

(L'autre valeur donne un minimum car la formule de l'aire donne une valeur négative si $t < 0$!)

$$x = \sqrt{\frac{4}{3}} \quad x^2 = \frac{4}{3} \quad y = 4 - \frac{4}{3} = 2\frac{2}{3}$$

$$2) \quad \vec{ML} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t \\ 4+t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-t \\ 1+t^2 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{ML}\|^2 = (5-t)^2 + (1+t^2)^2 \\ = 5 - 10t + t^2 + 1 + 2t^2 + t^4 \\ = t^4 + 3t^2 - 10t + 6 = h(x)$$

$$h'(t) = 4t^3 + 6t - 10 \\ = 2(2t^3 + 3t - 5)$$

on voit que cette eq. s'annule pour $t=1$; y en a-t-il d'autres?

$$\begin{array}{r|l} 2t^3 & +3t-5 \quad | \quad t-1 \\ -2t^3 & +2 \\ \hline & -2 \quad +2 \\ & \quad \quad 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} t-1 \\ 2t^2+2t+5 \end{array}$$

$$(2t^3+3t-5) = (2t^2+2t+5)(t-1)$$

$$\Delta = 4 - 8 \cdot 5 < 0$$

pas d'autre zéro

x	1
$h'(x)$	$- \quad 0 \quad +$
$h(x)$	$\nearrow \text{MN} \searrow$

3) $h(x)$ est minimum pour $x=1$

$$f(1) = -2$$

$$\text{Eq. de la tangente: } y = f(1) + f'(1) \cdot (x-1)$$

$$y = 3 - 2(x-1); \quad y = -2x+5$$

b) $\vec{PL} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ porte $\frac{1}{2}$ donc $\perp$ à droite de porte -2

3c) Le segment de la ~~la~~ chemin le plus court entre le point et la parabole est $\perp$ à la parabole!