Classe 3MR01 – semaine du 23 au 26 septembre 2008
Exercices d'analyse : intégration par substituion

Fin de l'explication pour l'intégrale par substitution, exemple 2 (livre p. 173-174) ***

On veut calculer : $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$

Substitution : on pose $x = \sin(t)$. On a alors

1) $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t} = |\cos(t)| = \cos(t)$
   (dans l'intervalle considéré)
2) On dérive $x = \sin(t)$: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = cos(t)$, donc $\mathrm{d}x = cos(t)\mathrm{d}t$
3) Limites d'intégration :
   $x = 0 \ldots 1$ correspond à $t = 0 \ldots \pi/2$, car $\sin(0) = 0$; $\sin(\pi/2) = 1$
4) L'expression sous le signe d'intégrale devient donc par cette substitution
   $\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \quad = \quad \cos(t)\cdot\cos(t)\mathrm{d}t = \cos^2(t)\mathrm{d}t$
5) On ne voit toujours pas de primitive simple de cette expression, mais on trouve une simplification dans les tables avec les formules trigonométriques qui donne
   $\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}$, et cette fois on trouve facilement une primitive !
6) On a donc : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin(2t)}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

Exercice :

a) Trouver ce que représente la courbe $y = \sqrt{1-x^2}$ (en éliminant les racines et en se souvenant du cours de géométrie analytique...) et justifier géométriquement le résultat.
b) Calculer cette intégrale sur l'intervalle $x = 0 \ldots 0{,}5$ et interpréter géométriquement le résultat.

Applications pour l'exemple 1 : Exercice 5.12

Ces exercices pourraient en général être résolus en recherchant une primitive comme on l'a fait jusque là. Les résoudre en utilisant une substitution comme pour l'exemple 1 du cours.

Indication à titre d'exemple pour le n°4 :

On pose $(1+t^2) = u$

On dérive cette égalité, où *u* est une fonction de *t*

$u = 1 + t^2$, donc $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 2t$, donc $2t\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$

L'expression sous le signe d'intégrale se simplifie alors en $1/u^2$,

et les limites d'intégrations doivent être adaptées : t = 3 ... 5 donne u = 10 ... 26

L'intégrale se simplifie donc en $I = \int_{10}^{26} \frac{1}{u^2}\mathrm{d}u = -\frac{1}{u}\Big|_{10}^{26} = \frac{4}{65}$

Faire selon ce schéma les exercices 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 12, 17, 19

Application pour l'exemple 2 : exercice 5.13

*** *Correctif par rapport à la version précédemment publiée :*

- Au point 1, il manquait les signes racines au deux premiers termes des égalités successives
- Au point 6), les limites d'intégration sont de 0 à PI/2 et non PI, et le résultat est par conséquent de PI/4 et non PI/2

Algèbre linéaire

1. Terminer et vérifier le calcul de l'inverse de matrice
   Si la matrice donnée est A et l'inverse trouvé A', faire la vérification dans les deux sens en calculant A • A' et A' • A pour vérifier qu'on retrouve bien la matrice identité

2. Utiliser cet inverse de matrice pour résoudre le système
   $$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 2x + 7y + 1 = 4 \\ -x + 10y - 3z = -6 \end{cases}$$
   (en le posant sous forme matricielle : $A \cdot X = B$, d'où $X = A^{-1} \cdot B$)

3. Ex. 0.16, 0.17, 0.19 – p. 112 – (Calculer les inverses de matrices par cette méthode)

4. Ex. 0.14 – Résoudre ces systèmes en utilisant une matrice augmentée et en poursuivant les opérations sur les lignes jusqu'à une matrice échelonnée, puis terminer la résolution par substitution.