Sélection de quelques exercices d'optimisation possibles... fascicule de 2e année dernière, p. 74-75 – Quelques notes de résolution

3.43
3.44
Je pense que nous avions fait ces deux exercices en classe... mais je n'ai pas été vérifier.

3.48
Variable : x = côté du carré – unité dm et dm^3
Volume = 128 ... h = V/x^2
Coût = aire base × 0.5 + aire côtés × 2 ... = 2 x^2 + 0.5 • 4x • 128/x^2
= 2 x^2 + 256/x = 2 (x^2+128/x) = h(x)
Cette expression est la fonction à optimiser.
Il vaut mieux la laisser sous cette forme pour la dériver : h'(x) = 2 (2x – 128/x^2) = 4 (x^3-64) / x^2. Là il vaut mieux mettre au même dénominateur et factoriser pour trouver les zéros. On voit de suite que la dérivée s'annule pour x = 4... et on vérifie que c'est bien un mimimum

3.45
On peut prendre comme variable la pente, ou son opposé puisqu'elle est négative
Droite de pente –m (avec m>0) passant par (3;2) :
y = -m x + h, 2 = - 3 m + h, donc h = 3 m + 2
On a donc y = -m x + 3 m + 2
Cette droite coupe Oy au point B donné par x=0 → y = 3 m + 2
Elle coupe Ox au point donné A par y=0, donc x = (3 m + 2) / m
L'aire du triangle est alors 1/2 • OA • OB = (1/2) • (3 m + 2) • (3 m + 2)/m
= (3 m + 2)^2 / 2 m.
C'est la fonction à optimiser. Reste à la dériver pour en vérifier la croissance.
Un peu de calcul donne comme dérivée (9 m^2-4)/2 m^2, qui est facile à factoriser

3.57 (abordable mais un peu long)

3.54 (assez facile)
3.55

3.56 calculs pas compliqués, mais plus subtil géométriquement...
On prend pour variable par exemple le rayon du cylindre.
Il faut alors trouver la hauteur h du cylindre.
Pour cela, il faut dessiner un schéma en coupe et observer les triangles semblables.
La partie du cône au-dessus du cylindre a une hauteur de 12 – h, et on aura les proportions suivantes : (12–h) / r = 12 / 4.
La suite est facile : on trouve h = 12 – 3 r, puis le volume V ... et le reste va tout seul...

Le 3.53 a été fait vendredi matin...
Le 3.52 commencé pour réviser en même temps un peu de géométrie analytique
Parabole y = 1 – x^2, prendre comme variable l'abscisse d'un point (mais avec un autre nom que x – par exemple a).
Point (a, 1 – a^2)
Pour trouver la tangente, on a sa pente : f'(a) = - 2 a
Droite de pente – 2 a passant par ce point :
y = – 2 a x + h ... en remplaçant x et y par les coordonnées du point, on trouve
1 – a^2 = – 2 a • a + h, d'où h = 1 + a^2
On a donc l'équation de la tangente : y = – 2 a x + (1 + a^2)
Cette droite coupe Oy au point B donné par x=0 -> y= (1 + a^2)
Elle coupe Ox au point donné A par y=0, donc x = (1 + a^2) / 2 a
L'aire à minimiser s'exprime donc par 1/2 • OA • OB = (1 + a^2)^2 / 4 a
C'est une fonction de a qu'il faut dériver (en considérant ici a comme la variable!)
Après quelques calculs, on trouve : (3*a^4 + 2*a^2 - 1) / 4 a^2
Comme on doit chercher les zéros, on essaie de factoriser le numérateur, en observant que s'il y a une factorisation simple, elle est de la forme (3 a^2 ± 1) (a^2 ± 1) ... et on trouve (3 a^2 – 1) (a^2 + 1). Le deuxième facteur est toujours positif, et le premier facteur donne a = 1/racine(3)

Autres exercices dans les données des examens de maturité des années précédentes

Démarche

- Trouver la bonne variable dans les paramètres variables de la situation.
- Exprimer les autres quantités en fonction de cette variable choisie (c'est souvent de la géométrie...).
- Trouver en particulier la fonction exprimant la quantité à optimiser (là, on fait de l'algèbre).
- Calculer la dérivée de cette fonction pour trouver où est le maximum ou le minimum (on passe à l'anlyse).
- Interpréter le résultat en fonction du problème et des questions posées.