Maturité Bugnon MS 2008 – Problème 3 (Géométrie analytique)

Corrigé de la question d) et e) : recherche de tangentes à un cercle

On a déjà l'équation du cercle :

$$(x-2)^2+(y-7)^2=9$$

On cherche la polaire du point $E(-1;\frac{11}{2})$ en remplaçant «la moitié des x et des y par les coordonnées du point»[1]

$$(-1-2)(x-2)+(\tfrac{11}{2}-7)(y-7)=9$$
$$-3(x-2)-\tfrac{3}{2}(y-7)-9=0 \quad |:3,\text{chang. signe}$$
$$(x-2)+\tfrac{1}{2}(y-7)+3=0 \quad |\cdot 2$$
$$2(x-2)+(y-7)+6=0$$
$$2x+y-5=0$$
$$y=5-2x$$

Les points de tangence sont l'intersection cercle-polaire. On calcule leurs coordonnées en résolvant le système {équation cercle ; équation polaire}
Résolution par substitution.

$$(x-2)^2+((5-2x)-7)^2=9$$
$$(x-2)^2+(-2-2x)^2=9$$
$$x^2-2x+4+4x^2+8x+4-9=0$$
$$5x^2+4x-1=0$$

On résout l'équation du second degré en x par la formule générale ou par factorisation
$5x^2+4x-1=(5x-1)(x+1)$

D'où les deux solutions du système : $T_1:\begin{cases}x=-1\\y=7\end{cases}$ $\quad T_2:\begin{cases}x=\frac{1}{5}=0.2\\y=4.6\end{cases}$

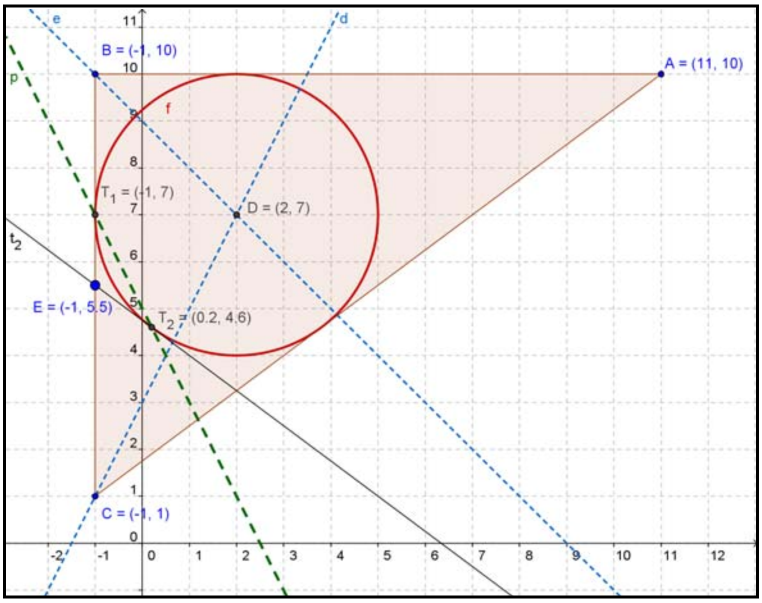
Les tangentes sont les droites ET_1 et ET_2. Comme le point T_1 a même abscisse que E, la tangente est évidemment la droite verticale d'équation $\boxed{x=-1}$, ce qui était évident dès le départ en regardant le dessin.

Pour la droite ET_2, on calcule :

$\overrightarrow{ET_2}=\begin{pmatrix}1.2\\-0.9\end{pmatrix}$ proport. à $\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$

L'équation de la droite s'écrit alors $3x+4y+\dots=0$, et on ajuste le troisième terme pour qu'elle passe par l'un des points : comme $3\cdot(-1)+4\cdot\frac{11}{2}=19$, l'équation de cette tangente est

$$\boxed{3x+4y-19=0}$$



Question e) – trouver les points de tangence

Comme on a utilisé ici la méthode de la polaire pour trouver les tangentes, on a répondu à cette question *avant même de trouver les tangentes*.

Il existe d'autres méthodes pour trouver les tangentes, par exemple en écrivant l'équation d'une droite de pente inconnue m passant par le point E, puis en ajustant la valeur de m pour que la droite soit tangente, soit en écrivant que le système {équation cercle ; équation droite}fournit une équation du second degré avec deux solutions confondues, soit en écrivant que la distance entre cette droite et le centre du cercle est égale au rayon. Dans les deux cas, on obtient en principe une équation du second degré en la pente – sauf qu'ici, il y a un piège : comme l'une des tangentes correspond à une pente infinie, l'équation en m est du premier degré, et on risque d'oublier la tangente verticale si on ne raisonne pas géométriquement.

Avec ces méthodes, on obtient *d'abord la pente des tangentes* cherchées, et on cherche *ensuite les points de tangence* en résolvant les systèmes {équation cercle ; équation tangente}

[1] On sépare les carrés ainsi : $(x-2)\cdot(x-2)+(y-7)\cdot(y-7)=9.$
Si l'équation est sous la forme développée, on la sépare ainsi

$$x^2+y^2-4x-14y+44=0 \quad\longrightarrow\quad x\cdot x+y\cdot y-2x-2x-7y-7y+44=0$$