Nombres complexes, introduction à la construction des nombres et applications trigonométriques

I. Introduction à la construction des nombres . . . . **-3-**
1. Les entiers naturels . . . . -3-
a) Propriétés de l'addition et de la multiplication . . . . -3-
b) Soustraction et division . . . . -3-
2. Constructions par étapes de nouveaux nombres . . . . -3-
3. Construction des entiers relatifs . . . . -3-
4. Construction des nombres rationnels . . . . -4-
5. Introduction des nombres réels . . . . -5-
6. Les polynômes . . . . -6-

II. Les nombres complexes . . . . **-7-**
1. Des réels aux «imaginaires» . . . . -7-
a) Exemple : . . . . -7-
b) Une racine pour les nombres négatifs . . . . -8-
c) En demandant peu, on obtient beaucoup . . . . -8-
2. Construction en bref . . . . -8-
a) Construction résumée selon le même schéma que les constructions précédentes . . . . -8-
b) Justifications plus détaillées . . . . -8-
c) Racine d'un nombre réel négatif quelconque . . . . -8-
3. Opérations sur les nombres complexes . . . . -9-
a) Addition . . . . -9-
b) Représentation géométrique . . . . -9-
c) Conjugaison . . . . -9-
d) Représentation géométrique . . . . -9-
e) Multiplication . . . . -10-
f) Multiplication d'un nombre complexe par un nombre réel . . . . -10-
g) Combinaisons linéaires de nombres complexes . . . . -11-
h) Module . . . . -11-
i) Inverse d'un nombre complexe . . . . -12-
j) C est un corps . . . . -12-
k) Interprétation géométrique de la multiplication . . . . -12-
l) Multiplication par i . . . . -13-
m) Multiplication par un nombre quelconque a . . . . -13-
4. Forme trigonométrique des nombres complexes . . . . -14-
a) Module et argument . . . . -14-
b) Passage d'une forme à l'autre . . . . -14-
c) Nombres complexes unitaires . . . . -15-
d) Formules d'addition de trigonométrie . . . . -15-
e) Formule de Moivre . . . . -16-
f) Racines $n^{\text{ème}}$ de 1 . . . . -16-

g) Multiplication et division des nombres complexes quelconques en représentation trigonométrique . . . . -17-
h) Puissances et racines entières en représentation trigonométrique . . . . -17-
5. Tableau résumé . . . . -18-
6. Inversion des fonctions trigonométriques . . . . -19-

III. Exercices . . . . -20-

Silvain Dupertuis
Version du 14 octobre 2007

I. Introduction à la construction des nombres

1. Les entiers naturels

Les nombres peuvent se construire par étapes successives à partir des entiers naturels.
Dans cette présentation, on considère connu :

- L'ensemble des entiers naturel, $\mathbb{N}$ (cet ensemble comprend le nombre 0, mais, dans l'histoire des mathématiques, il a fallu de nombreux siècles pour l'inventer).
- Les propriétés quatre opérations élémentaires.

a) Propriétés de l'addition et de la multiplication

\+ L'addition est *associative* $[(a+b)+c = a+(b+c)$] et *commutative* $[a+b = b+a]$
Il y a un *élément neutre*, qui est 0, tel que pour tout n on a $n+0 = 0+n = n$

- La multiplication est également *associative* et *commutative* $[(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$] et $[a \cdot b = b \cdot a]$
Il y a également un *élément neutre*, 1, tel que pour tout n on a $n \cdot 1 = 1 \cdot n = n$

•+ La multiplication est *distributive* par rapport à l'addition
[$a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$]

b) Soustraction et division

Ce sont les opérations «inverses» de l'addition et de la multiplication.
Mais avec ces nombres-là, ces opérations sont parfois «possibles», parfois «impossibles».

2. Constructions par étapes de nouveaux nombres

Il y a diverses manières de compléter par étapes l'ensemble des nombres.
Pour s'en tenir à la description élémentaire de cette construction, on peut montrer à chaque étape pourquoi et comment on introduit de nouveaux nombres :

- On fabrique de nouveaux nombres pour permettre d'effectuer une opération jusque-là impossible – le *but du jeu* de l'étape.
- On les fabrique en les désignant au moyen d'*expressions* bien définies à partir des nombres déjà connus.
- On pose des *règles d'identification*, qui permettent d'identifier certains des nouveaux nombres créés aux nombres déjà connus.
- On donne des *règles d'équivalence*, qui déterminent dans quels cas deux expressions représentent le même nombre.
- On donne des *règles de calcul*, qui déterminent comment on additionne et on multiplie ces nouveaux nombres.

Tout cela peut se faire rigoureusement en utilisant les outils de la théorie des ensembles, mais on s'en tiendra ici à une présentation plus intuitive de cette construction.

3. Construction des entiers relatifs

- *But du jeu* : permettre d'effectuer dans tous les cas des soustractions.
- *Expressions* : un nombre naturel précédé du signe + ou − [exemples : +1, –2, –0, ...]
- *Règles d'identification* : on identifie un nombre naturel précédé du signe + à ce nombre naturel [exemple : +5 = 5].
- *Règles de calcul* : ce sont les règles connues pour additionner et multiplier des nombres relatifs, qui permettent de trouver le signe du résultat et sa «valeur absolue» :

- Pour l'addition, on effectue une addition ou une soustraction des valeurs absolues, selon que les signes sont égaux ou opposés, et on a des règles pour trouver le signe. [Exemple : pour calculer $(+1350) + (-7899)$, on doit effectuer une soustraction de nombres naturels, et le résultat est négatif car la valeur 7899 > 1350]
- Pour la multiplication, on multiplie les valeurs absolues et on applique la «règle des signes» pour trouver le signe du résultat.
- Pour trouver l'opposé, on change simplement le signe.

- *Règles d'équivalence* : dans ce cas, la seule règle est que $-0 = +0$.

L'ensemble des nombres obtenus ainsi est l'ensemble des entiers relatifs, noté $\mathbb{Z}$
La soustraction étant maintenant possible, on a maintenant

- un **élément opposé** pour l'addition, c'est-à-dire que pour tout nombre a il existe un opposé, $-a$, tel que $a + (-a) = (-a) + a = 0$;

Avec ces propriétés des opérations, on dit que
$\mathbb{Z}$ muni de l'addition est un «**groupe**».
$\mathbb{Z}$ muni de l'addition et de la multiplication est un «**anneau**».

Ces termes n'apportent pas grand chose tant qu'on se cantonne aux nombres. Mais dans le développement des mathématiques, on rencontre de nombreux autres objets pour lesquels on définit des opérations ayant les mêmes propriétés. Ces structures ont des caractéristiques communes qui découlant de ces propriétés de base.
Le premier exemple qui se présente est celui des **polynômes**, qui forment également un anneau pour l'addition et la multiplication.

4. Construction des nombres rationnels

- *But du jeu* : permettre d'effectuer toutes les divisions, sauf la division par 0.
- *Expressions* : les fractions, avec un numérateur et un dénominateur non nul. Ces expressions sont donc formées de deux entiers relatifs, dont le deuxième doit être non nul. Exemples : $\frac{2}{3}$; $\frac{-4}{18}$; $\frac{5}{1}$; $\frac{0}{-2}$
- *Règles d'identification* : une fraction dont le numérateur est 1 est identifiée à un entier [Exemple : $\frac{-4}{1} = -4$].
- *Règles d'équivalence* : ce sont celles connues sous le nom de «simplification» et d'«amplification». Deux fractions sont équivalentes (et représentent le même nombre) si on obtient deux fractions identiques en les simplifiant. [Exemple : $\frac{-24}{15} = \frac{32}{-20}$].
- *Règles de calcul* : il s'agit des règles connues du calcul des fractions (connues... mais souvent mal maîtrisées par les élèves !!!)
  - Pour l'addition, c'est celle qui consiste à «mettre au même dénominateur» par amplification, puis à additionner les numérateurs.
  - Pour la multiplication, c'est celle qui consiste à multiplier entre eux les numérateurs et les dénominateurs.
  - Il faut ajouter les règles pour trouver l'opposé (on prend l'opposé du numérateur) et l'inverse (on échange le numérateur et le dénominateur).

NB : On peut aussi construire d'abord les fractions, puis introduire les nombres négatifs, comme on le fait dans le parcours scolaire. Dans l'histoire des mathématiques, les fractions sont entrées dans l'univers des nombres bien avant les nombre négatifs. Il a fallu des siècles pour se dire qu'un nombre pouvait exister quand il n'y avait plus rien à compter (le zéro). Quant à admettre qu'on puisse encore enlever quelque chose quand il n'y a plus rien, il a encore fallu quelques siècles pour avaler la pilule...
Cependant, la construction mathématique abstraite se révèle plus simple et plus logique dans l'ordre ci-dessus, en introduisant les nombres négatifs avant les fractions.

Arrivés à ce stade, on a un ensemble qu'on nomme $\mathbb{Q}$, muni des opérations d'addition et de multiplication, et dans lequel on peut effectuer toutes les soustractions et toutes les divisions par un nombre différent de zéro.
En d'autres termes, on a maintenant :

- un **élément opposé** pour l'addition;
- un **élément inverse** pour la multiplication, c'est-à-dire que pour tout nombre a non nul, il existe un inverse, $\frac{1}{a}$, tel que $\frac{1}{a} \cdot a = a \cdot \frac{1}{a} = a$.

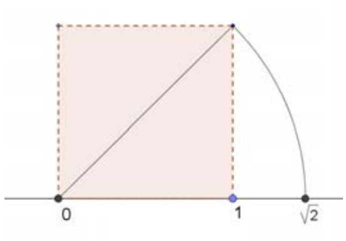
Avec cette propriété en plus (élément inverse), on dit que $\mathbb{Q}$ est un «**corps**».
Cette condition d'avoir un inverse pour la multiplication est très restrictive, et on a bien moins de choix possible pour fabriquer des «corps» que pour construire des «anneaux».

5. Introduction des nombres réels

Le passage aux nombres réels est beaucoup plus complexe que les opérations ci-dessus, et on a mis beaucoup de temps à en trouver une description rigoureuse (il y a diverses manières de le faire).
Pour en rester à une compréhension intuitive, disons que, quand on passe de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$, on quitte le domaine de l'arithmétique pure pour rejoindre celui de la géométrie.
L'idée est en effet que l'on peut représenter tous les nombres rationnels sur une droite, une fois qu'on a fixé un point origine, un sens et une unité de longueur. Or il se trouve que si l'on place tous ces nombres rationnels, il remplissent la droite... incomplètement :

– ils la semblent la recouvrir, car on peut s'approcher aussi près qu'on veut de n'importe quel point de la droite avec des points correspondant à des nombres rationnels;
– mais ils laissent des trous, car il y a des points de la droite qui ne correspondent pas à un nombre rationnel.

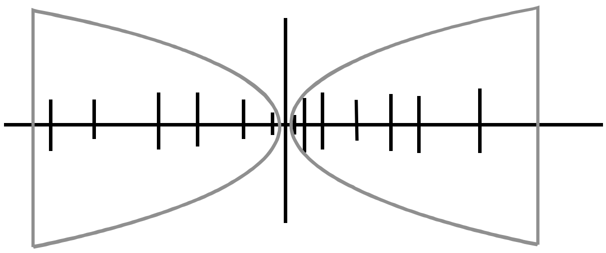
L'exemple le plus simple et le plus connu est la diagonale d'un carré de côté 1, qui vaut $\sqrt{2}$ comme chacun sait, un nombre dit irrationnel car on ne peut pas le représenter avec une fraction. On peut seulement s'en approcher aussi près qu'on veut.



Alors, comment définir ce nombre ?

Les descriptions les plus rigoureuses utilisent

- soit des suites de nombres (les «suites de Cauchy») ayant la propriété de tendre vers une limite
- soit des suites d'intervalles emboîtés (des intervalles de plus en plus petits, emboîtés les uns dans les autres, et qui enferment un point précis correspondant à un nombre réel
- soit des «coupures» (on sépare les points rationnels en deux moitiés, l'une à gauche et l'autre à droite, ce qui définit un point qui, lui, n'a pas besoin d'être rationnel).



Un nombre irrationnel se laisse approcher aussi près qu'on veut, à gauche et à droite, par des fractions, mais ces fractions ne tombent jamais pile poil sur ce nombre... – un nombre irrationnel est une sorte de trou à un endroit précis dans un nuage de fractions

On se contentera ici de l'approche scolaire traditionnelle, consistant à définir un nombre réel par un **développement décimal**. On reprendra donc le même schéma que dans les exemples ci-dessus :

- *But du jeu* : «compléter» la droite en bouchant tous les trous...
- *Expressions* : des développements décimaux limités ou illimités (avec un signe + ou −)
- *Règles d'identification* : on identifie un développement décimal limité à un nombre rationnel au moyen d'une fraction équivalente [Exemple : $2,345 = \frac{2345}{1000}$]
- *Règles de calcul* : ce sont les règles connues pour calculer avec des développements décimaux (il faut quelques ruses pour étendre ces règles au cas d'un développement illimité).
- *Règles d'équivalence* :
  - on peut ajouter autant de zéros qu'on veut à un développement décimal [Exemple : $2,346 = 2,3460 = 2,34600 = \cdots = 2,346000\ldots = 2,34\overline{0}$]
  - un développement décimal illimité qui se terminent par des chiffres «9» équivaut à un développement décimal limité, le dernier chiffre avant le premier«9» de la série infinie étant augmenté de 1 [Exemple : $2,345999\ldots = 2,345\overline{9} = 2,346$]

La structure ainsi définie est encore, comme $\mathbb{Q}$, un corps, le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. Les propriétés qu'il a en plus (intuitivement, celle de «remplir» une droite), sont décrites sous le terme barbare de «corps complet archimédien» − et il est la seule structure à avoir ces propriétés.

6. Les polynômes

Les polynômes se construisent à partir d'un ensemble de nombres et d'un ensemble de lettres, en construisant des expressions avec les opérations élémentaires d'addition et de multiplication, auxquelles on impose de garder les mêmes propriétés qu'en arithmétique.

- *But du jeu* : pouvoir calculer avec expressions contenant des nombres et des lettres, et de manière à ce que tous les calculs effectués restent valables lorsque l'on remplace ces lettres par des nombres,
- *Expressions* : celles qu'on peut construire avec les nombres et un ensemble fini de lettres données (par exemple, X,Y, Z), et les opérations d'addition et de multiplication. (Habituellement, les nombres réels, mais on peut faire la même construction avec un autre ensemble de nombres, par exemple les rationnels).
- *Règles d'identification* : une expression contenant seulement des nombres est identifiée à un nombre.
- *Règles d'équivalence* : ce sont celles qui découlent des propriétés des opérations d'addition et de multiplication (associativité, commutativité, distributivité) : deux expressions qui s'obtiennent par une transformation qui respecte ces «règles de l'algèbre» représentent le même polynôme.
  Par exemple, les expressions $a(a+b) - ab$ et a^2 représentent le même polynôme.
- *Règles de calcul* : ce sont les règles de calcul habituelles des polynômes, qui consistent par exemple à additionner en regrouper les monômes semblables et en additionnant leurs coefficients, ou à multiplier des monômes en additionnant les exposants des lettres, et à multiplier les polynômes en appliquant les règles de la distributivité.
  On en déduit notamment toutes les règles du genre $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Arrivés à ce stade, on a construit, pour chaque ensemble de lettres donné, l'«anneau des polynômes» à coefficients réels sur cet ensemble de lettres. Si l'on prend par exemple les trois lettres X, Y, Z on note cet anneau de polynômes $\mathbb{R}[X, Y, Z]$

II. Les nombres complexes

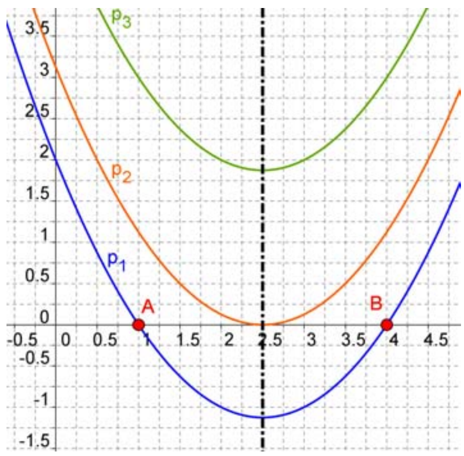
1. Des réels aux «imaginaires»

Parvenu à la construction de $\mathbb{R}$, on a déjà un ensemble très complet de nombres.
On a cependant encore des «opérations impossibles» avec les résolutions des équations polynomiales. Notamment l'équation du second degré, qui a parfois deux, parfois une et parfois zéro solution, parce qu'on ne peut pas extraire de racine carrée d'un nombre négatif.

On peut donner un exemple simple qui permet de trouver raisonnable qu'un nombre négatif puisse avoir des racines carrées.
Lorsque l'on cherche le sommet d'une parabole donnée par une équation $y = ax^2 + bx + c$, son abscisse est $\frac{-b}{2a}$. Cette valeur est exactement la moyenne des deux solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, pourvu que le disciminant $b^2 - 4ac$ soit positif et qu'on ait deux solutions.
On peut admettre que

- quand le déterminant est nul, il y a deux solutions, confondues, et cette valeur $\frac{-b}{2a}$ est encore la moyenne des deux zéros;
- quand le déterminant est négatif, en supposant l'existence de racines «imaginaires», cette valeur $\frac{-b}{2a}$ est encore une fois la moyenne des deux zéros ainsi «imaginés».

a) Exemple :



Considérons les paraboles
$p_1 : y = 0.5x^2 - 2.5x + 2$
$p_2 : y = 0.5x^2 - 2.5x + 25/8$
$p_3 : y = 0.5x^2 - 2.5x + 25/8$
Elles ont tous trois un axe de symétrie d'équation $x = 2.5$

1) La parabole p_1 coupe l'axe des x aux points dont les abscisses sont les solutions de l'équation
$0.5x^2 - 2.5x + 2 = 0$, soit
$x = \frac{2.5 \pm \sqrt{6.25 - 4}}{2 \cdot 0{,}5} = 2.5 \pm \sqrt{2.25} = 2.5 \pm 1.5$
Les zéros sont donc 1 et 5.
L'abscisse de l'axe de symétrie est donné par la moyenne de ces deux zéros :
$\frac{2.5 + \sqrt{2.25} + 2.5 - \sqrt{2.25}}{2} = 2.5$
2) Cela fonctionne encore pour la parabole p_2, dont les deux points d'intersection avec l'axe Ox sont confondus.
3) Mais pour la parabole p_3, il n'y a pas de point d'intersection...
Cependant, si l'on utilise la même formule que ci-dessus, on peut écrire, en admettant des racines de nombres négatifs : «$\frac{2.5 + \sqrt{-4.75} + 2.5 - \sqrt{-3.75}}{2} = 2.5$» . Ces racines s'éliminent, et la formule donne encore l'abscisse de l'axe de symétrie.

b) Une racine pour les nombres négatifs

L'idée de départ des nombres complexes est de permettre de **donner des racines carrées aux nombres négatifs**. Cela permet de résoudre toutes les équations du second degré à coefficients réels.

c) En demandant peu, on obtient beaucoup

Mais la grande surprise, une fois qu'on enrichit ainsi notre ensemble de nombres, c'est que cela permet non seulement résoudre les équations du second degré à coefficients réels, mais tous les polynômes de degré n ont exactement n zéros (éventuellement confondus) et se décomposent ainsi en facteurs du premier degré.
Le **corps des nombres complexes** ainsi constitué a des applications essentielles dans un grand nombre de domaines des mathématiques et de la physique, par exemple dans tout ce qui concerne l'analyse des signaux périodiques (vibrations, sons, ondes de toutes sortes), ainsi qu'en physique quantique.

2. Construction en bref

a) Construction résumée selon le même schéma que les constructions précédentes

- *But du jeu* : permettre d'extraire la racine carrée de nombres négatifs.
  Pour cela, il suffit d'introduire un seul nouveau nombre, une racine carrée de -1, qu'on note tout simplement i (pour «i−maginaire»), et avec lequel on fabriquera des expressions de la même manière qu'on a fabrique les polynômes avec des lettres.
  Sauf que, puisque ce nombre i est une racine carrée de -1, on aura $\boxed{i^2 = -1}$, ce qui implique que les «polynômes» qu'on construira se limiteront au premier degré.
- *Expressions* : des expressions de la forme $a + bi$, où *a* et *b* sont des nombres réels.
  Un «nombre complexe» $\boxed{z = a + bi}$ est donc déterminé par la donnée de deux nombres réels a et b, appelés respectivement «**partie réelle**» et «**partie imaginaire**», et notées $a = \Re(z)$ et $b = \Im(z)$, ou plus simplement $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$
- *Règles d'identification* : on identifie un nombre réel dont la partie imaginaire est nulle à une nombre réel [Exemple : $2,345 + 0i = 2,345$]
- *Règles de calcul* : ce sont celles des polynômes, en posant en plus que $i^2 = -1$, ce dont on va étudier les conséquences en détail plus loin (les calculs sont très beaucoup plus simples !)
- *Règles d'équivalence* : ici il n'y en a pas besoin ici. Deux expressions complexes sont équivalentes si leurs parties réelles et imaginaires sont égales.

L'ensemble ainsi construit est l'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$.

b) Justifications plus détaillées

c) Racine d'un nombre réel négatif quelconque

Il suffit de créer cette racine de -1 pour pourvoir extraire une racine de n'importe quelle nombre négatif. Exemple : on cherche une racine carrée de -25. On voit tout de suite que $(5i)^2 = 5^2 \cdot i^2 = 25 \cdot -1 = -25$, donc $5i$ est bien une racine carrée de -25.
Mais on ne peut plus dire que c'est *la* racine carrée, car $-5i$ convient aussi bien, et on n'a plus de moyen cohérent de choisir une de ces deux racines pour dire que c'est *la* racine carrée de -25.

Si on utilise sans précaution le signe $\sqrt{}$ avec des arguments négatifs, en appliquant les règles ordinaires de l'algèbre, on s'expose à de jolie petites contradictions, telles que celle-ci :

$$10 = \sqrt{100} = \sqrt{(-25)\cdot(-4)} = \sqrt{25\cdot(-1)\cdot 4\cdot(-1)}$$
$$= \sqrt{25}\cdot\sqrt{-1}\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1} = 5\cdot i\cdot 2\cdot i = 10\cdot i^2 = 10\cdot(-1) = -10$$

De fait, les règles habituelles de l'algèbre avec les racines carrées ne s'appliquent plus de la même manière, à moins d'admettre de prendre à chaque fois les deux valeurs possibles.

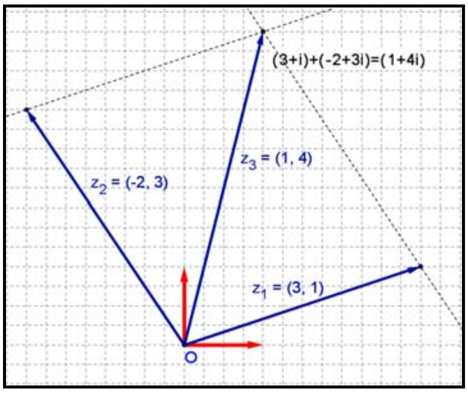
3. Opérations sur les nombres complexes

a) Addition

L'addition se fait tout naturellement en additionnant parties réelles et parties imaginaires.
Il suffit d'appliquer les règles de l'algèbre élémentaire :
$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
De même, l'opposé d'un nombre s'obtient en prenant l'opposé des deux composantes
$-(a + bi) = (-a) + (-b)i$

b) Représentation géométrique

Un nombre complexe étant donné par deux nombres réels, on pourra représenter $\mathbb{C}$ par le plan, de même qu'on peut représenter $\mathbb{R}$ par une droite.
De plus, comme ils s'additionnent composante par composante, comme les composantes d'un vecteur, on peut représenter l'addition dans $\mathbb{C}$ par l'addition des vecteurs dans le plan.
A $\mathbb{R}$ comme sous-ensemble de $\mathbb{C}$ correspond l'axe horizontal comme partie du plan muni de ses deux axes de coordonnées.



c) Conjugaison

i et $-i$ sont les deux racines carrées de -1. (Il ne peut y en avoir d'autres, car ce sont des zéros du polynôme x^2+1 et un polynôme du deuxième degré a au plus deux zéros)
On peut alors effectuer la transformation consistant à remplacer i par $-i$, et toutes les égalités restent valides. Cette transformation s'appelle la conjugaison :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = x + yi & \mapsto & \overline{z} = x - yi \end{array}}$$

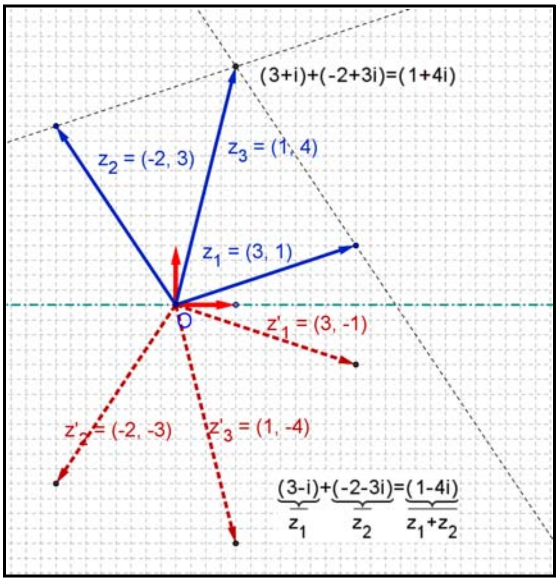
$\overline{z}$ est le conjugué de z

On dit qu'il s'agit d'un «isomorphisme», et même d'un «automorphisme», car il c'est un isomorphisme de $\mathbb{C}$ vers lui-même.
Cela signifie notamment que le conjugué d'une somme ou d'un produit est la somme des conjugués des termes :

$$\boxed{\overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_1 + z_2} \quad \text{et} \quad \overline{z_1}\cdot\overline{z_2} = \overline{z_1\cdot z_2}}$$

d) Représentation géométrique

Cette conjugaison correspond à une symétrie axiale autour de l'axe horizontal.



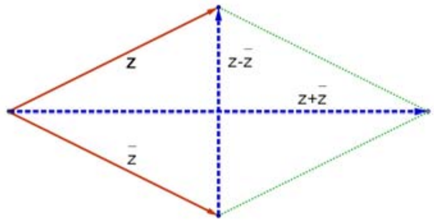
Additionnons ou soustrayons maintenant un nombre et son conjugué. On obtient :

$(x + yi) + (x - yi) = 2x$ et

$(x + yi) - (x - yi) = 2yi$

On peut donc écrire les formules :

$$\boxed{z + \overline{z} = 2\Re(z) \quad \text{et} \quad z - \overline{z} = 2\Im(z)}$$



e) Multiplication

On multiplie comme des polynômes... mais en posant $i^2 = -1$

Exemple de multiplication :

$(2 + 3i) \cdot (3 + 5i) = 6 + 9i + 10i + 15i^2 = (6 - 15) + (9 + 10)i = -9 + 19i$

Le fait que $i^2 = -1$ fait évidemment disparaître les termes du second degré.

Cas général : on trouve les formules suivantes

$$\boxed{\begin{array}{c} z_1 = (x_1 + y_1 i) \qquad z_2 = (x_2 + y_2 i) \\ z_1 \cdot z_2 = x_1 y_1 + x_1 y_2 i + x_2 y_1 i + x_2 y_2 i^2 = \underbrace{(x_1 y_1 - x_2 y_2)}_{\text{partie réelle}} + \underbrace{(x_1 y_2 + x_2 y_1)}_{\text{partie imaginaire}} i \end{array}}$$

A ce stade, on ne voit pas ce que peuvent bien représenter ces formules, sinon qu'à un signe près, on retrouve les formules pour le produit scalaire et le produit vectoriel de deux vecteurs.

Par ailleurs, il ne saute pas aux yeux que la division soit possible. Mais on peut le vérifier algébriquement. Donner un nombre et cherchons son inverse :

Nombre donné : $c = a + bi$

Nombre trouver : $z = x + yi$

Equation en nombres complexes : $c \cdot z = 1$

pour résoudre cette équation, on pose

$$\begin{array}{llcccc} c \cdot z = & (a+bi)(x+yi) & = & (ax - by) & + & (ay + bx)i \\ 1 & & = & 1 & + & 0i \end{array}$$

donc $c \cdot z = 1 \iff \begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$

Cette équation en nombres complexes donne un système de deux équations en nombres réels: Ce système n'est pas très compliqué à résoudre. Nous le laisserons en exercice. Mais une belle astuce permet de raccourcir les calculs... grâce à la conjugaison et au module (valeur absolue), ce que nous verrons plus loin.

f) Multiplication d'un nombre complexe par un nombre réel

Soit r un nombre réel et $z = x + yi$ un nombre complexe

Alors $r \cdot z = r(x + yi) = rx + ryi$

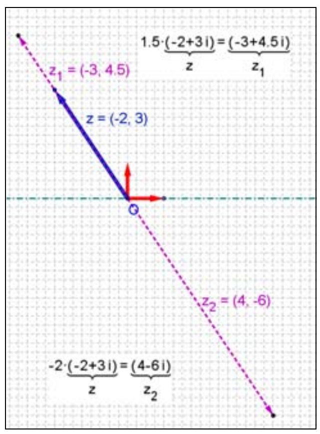
On reconnaît la formule de la multiplication d'un vecteur par un nombre.

Multiplier un nombre complexe par un nombre réel correspond donc, dans la représentation géométrique, à multiplier le vecteur représentant le nombre complexe par ce nombre.

Cette opération est une homothétie de centre O et de rapport r

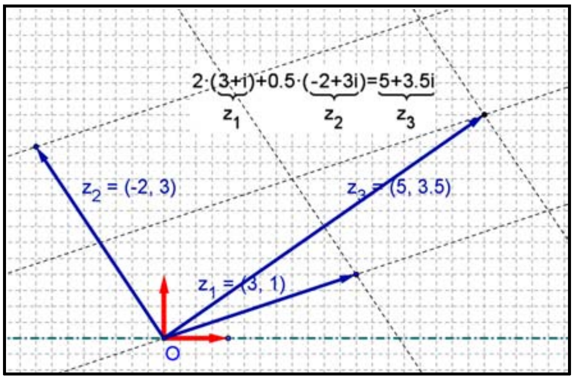
A la multiplication par un réel r correspond donc une homothétie.

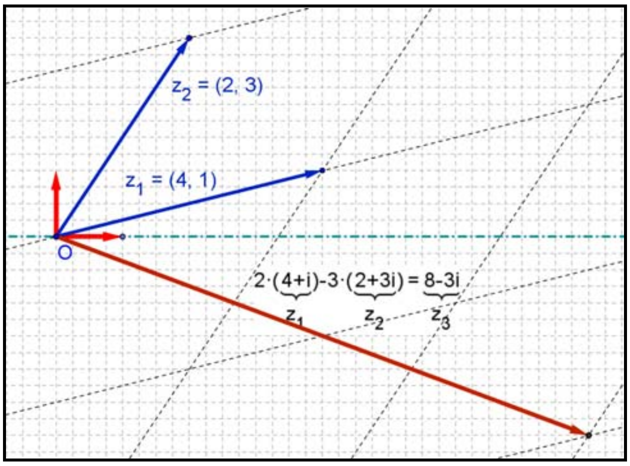
On peut également diviser par un nombre réel : $\frac{z}{r} = \frac{x}{r} + \frac{y}{r} i$



g) Combinaisons linéaires de nombres complexes

On peut construire des expressions de la forme $k_1 z_1 + k_2 z_2$, les k_i étant des nombres réels et les z_i des nombres complexes. En vertu de ce que nous avons déjà observé par rapport à la représentation géométrique, une telle expression correspond à une combinaison linéaire de vecteurs.





Exemple :

$z_1 = 4 + i \quad z_2 = 2 + 3i \quad k_1 = 3 \quad k_2 = -2$

$k_1 z_1 + k_2 z_2 = 3(4 + i) - 2(2 + 3i) = 8 - 3i$

correspond au calcul avec les composantes de vecteurs

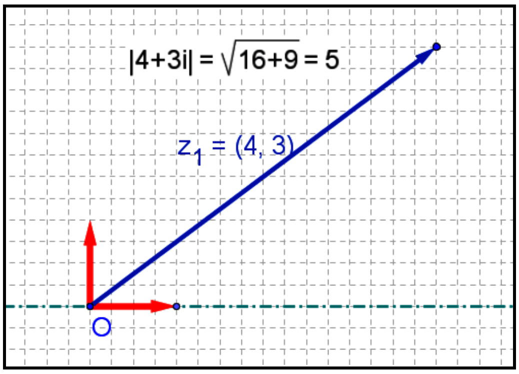
$$3\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\-3\end{pmatrix}$$

h) Module

Observons ce qui se passe si on multiplie un nombre pas son conjugué :

$$\text{Soit } z = (x + yi)$$

$$\text{alors } z \cdot \overline{z} = (x + yi)(x - yi) =$$
$$x^2 - (yi)^2 = x^2 - y^2 i^2 = x^2 + y^2$$



On reconnaît (grâce à ce cher Pythagore!) la formule qui donne le carré de la norme d'un vecteur. D'où une interprétation géométrique : la racine carrée de ce nombre est la norme du vecteur, et on pose comme définition que c'est le **module** (ou valeur absolue) du nombre *z*. Si *z* est réel, le module en tant que nombre complexe est la valeur absolue en tant que nombre réel. On a donc

$$\boxed{\text{module de } z = |z| \underset{\text{déf}}{=} \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{norme du vecteur correspondant}}$$

Propriété importante:

Comme pour les nombres réels, la valeur absolue d'un produit est le produit des valeurs absolues : $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

Cette égalité se démontre simplement avec les propriétés de la racine carrée et de la conjugaison :

$$
\begin{aligned}
|z_1 \cdot z_2| &= \sqrt{(z_1 \cdot z_2)\overline{(z_1 \cdot z_2)}} && \text{par définition} \\
&= \sqrt{(z_1 \cdot z_2) \cdot \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}} && \text{propriéte de la conjugaison} \\
&= \sqrt{(z_1 \cdot \overline{z_1}) \cdot (z_2 \cdot \overline{z_2})} && \text{en changeant l'ordre des termes} \\
&= \sqrt{z_1 \cdot \overline{z_1}} \cdot \sqrt{z_2 \cdot \overline{z_2}} && \text{propriétés de la racine} \\
&= |z_1| \cdot |z_2| && \text{par définition de la valeur absolue}
\end{aligned}
$$

i) Inverse d'un nombre complexe

Cette observation va nous permettre de trouver une belle formule pour trouver l'inverse d'un nombre. En effet, puisqu'on trouve un nombre réel en multipliant un nombre par son conjugué, et qu'on sait diviser par un nombre réel, on arrive à trouver facilement une formule pour l'inverse :

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2 \implies \frac{z \cdot \overline{z}}{|z|^2} = 1$$
$$\implies z \cdot \frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1 \implies z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

Exemple : on veut trouver l'inverse du nombre $z = 3 + i$

Calcul :

$$|z|^2 = 3^2 + 1^2 = 10$$
$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{3-i}{10} = \frac{3}{10} - \frac{1}{10}i = 0,3 - 0,1i$$

Vérification :

$(3+i)(0,3-0,1i) =$

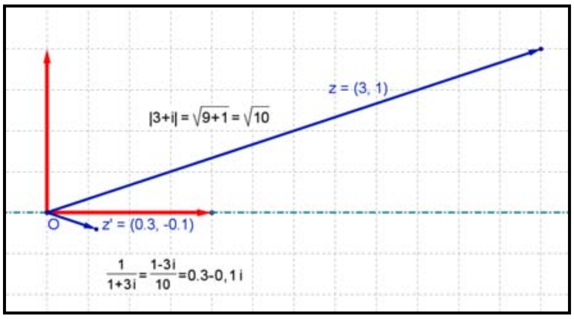
$(0,9+0,1) + (0,3-0,3)i = 1$

Observation géométrique

On peut voir que les directions des vecteurs représentant le nombre et son inverse sont symétriques par rapport à l'axe horizontal.

Quant à leurs valeurs absolues, elles sont inverses l'une de l'autre :

$$|3+i| = \sqrt{10}; \quad |0,3-0,1i| = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$



j) C est un corps

Puisque n'importe quel nombre complexe non nul a une inverse, la division par un nombre non nul est toujours possible.

$\mathbb{C}$ a donc les mêmes caractéristiques algébriques que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, à savoir que les propriétés d'associativité, commutativité et distributivité, avec les éléments neutres 1 et 0, et l'existence d'un opposé pour l'addition et d'un inverse pour la multiplication. C'est aussi un «corps».

k) Interprétation géométrique de la multiplication

Arrivés à ce stade, on sait faire toutes les opérations algébriques.

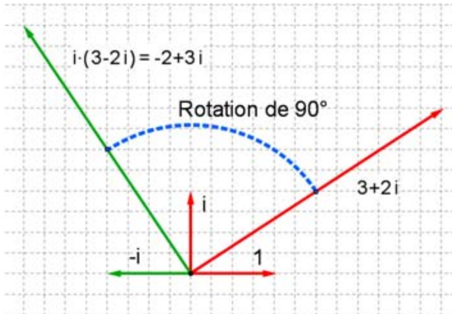
Mais il nous manque une interprétation géométrique de la multiplication, et c'est là que les nombres complexes acquièrent toute leur beauté !

On va essayer de comprendre à qui correspond l'opération multiplier un nombre complexe quelconque par un nombre donné $c = a + bi$

On a déjà vu que si le facteur multiplicatif était un nombre réel, on obtenait une homothétie.

l) Multiplication par *i*

Observation :
$i \cdot 1 = i$
$i \cdot i = -1$
$i \cdot (3+2i) = -2+3i$
On voit que la **multiplication par *i* correspond à une rotation de 90°**

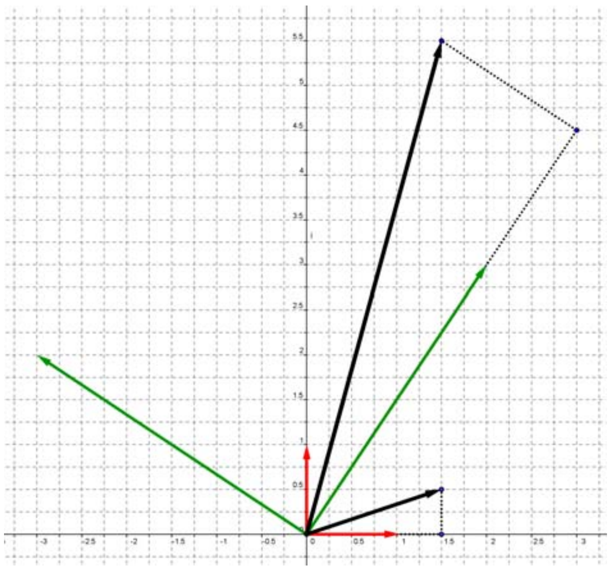


m) Multiplication par un nombre quelconque *a*

On va examiner progressivement ce qui se passe pour d'autres facteurs, mais une première remarque s'impose :
Si on prend une combinaison linéaire à coefficients réels de deux nombres complexes, et qu'on la multiplie par un nombre complexe donné, on obtient la combinaison linéaire des produits des deux nombres complexes donnés. Cela découle des simples propriétés algébriques des opérations (y compris la commutativité de la multiplication, indispensable pour cette propriété) :
On se donne deux nombres complexes z_1 et z_2, et deux réels λ_1 et λ_2
On se donne maintenant un multiplicateur complexe a
On peut alors écrire : $a(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) = \lambda_1(az_1) + \lambda_2(az_2)$
On peut exprimer cela en disant que la multiplication par un facteur a préserve les combinaisons linéaires.

Pour étudier l'effet géométrique de la multiplication par le nombre a, il suffit donc de voir ce que cela produit sur deux vecteurs d'une base.
Or la base naturelle est formée des vecteurs correspondants aux nombres 1 et i

Examinons cet exemple :
soit $a = 2+3i$
$a \cdot 1 = a = 2+3i$
$a \cdot i = (2+3i)i = -3+2i$
Les vecteurs correspondants aux nombres
$e_1 = 2+3i$ et $e_2 = -3+2i$
représentent une nouvelle base, la transformée par similitude (rotation combinée avec une homothétie) de la base (1; *i*)
Prenons maintenant le nombre
$z = 1,5+0,5i$
On peut alors écrire que
$a \cdot z = 1,5 \cdot e_1 + 0,5 \cdot e_2$



Ainsi l'image de z par cette multiplication correspond à l'image du vecteur par la la similitude illustrée ci-contre. C'est une similitude centrée en *O* et qui amène le vecteur $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ vers le vecteur $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

4. Forme trigonométrique des nombres complexes

a) Module et argument

La similitude représentée ci-dessus est la composition d'une homothétie et d'une rotation, toutes deux de centre O.

- Le rapport de cette homothétie est la longueur du vecteur correspondant au nombre $a = 2 + 3i$, donc **son module** : $|a| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$
- L'angle de la rotation est l'angle du vecteur correspondant à a avec l'axe Ox. Cet angle vaut $\arctan \frac{3}{2} = \arctan 1,5 \cong 56.31^\circ \cong 0,9828 \text{ rad}$. Exprimé en radians, on appelle cet angle l'**argument** du nombre complexe a.

Un nombre complexe peut donc être déterminé par deux nombres réels de deux manières différentes :

- Soit au moyen de sa partie réelle et de sa partie imaginaire : $z = x + yi$
- Soit au moyen de son module r et de son argument θ

b) Passage d'une forme à l'autre

$$\boxed{\begin{array}{l} r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan(\theta) = \frac{y}{x} \end{array}}$$

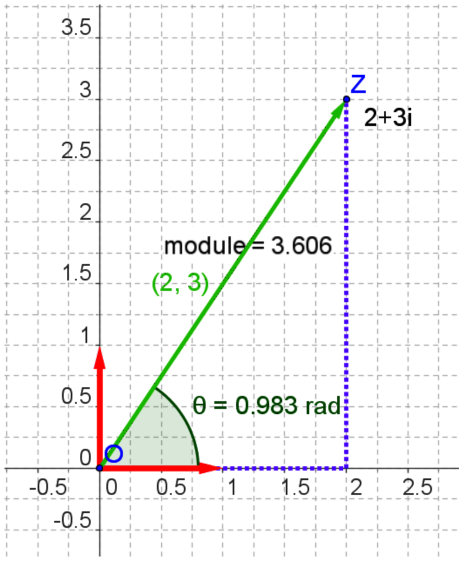
(Note : en calculant *Arctan* avec la calculatrice, il faut ajouter ou soustraire π au résultat selon dans quel quadrant on se trouve[1])

Pour retrouver les parties réelles et imaginaires à partir du module et de l'argument, on applique simplement les règles de la trigonométrie : $\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}$

On peut donc écrire

$$\boxed{z = x + yi = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

On l'appelle **forme trigonométrique** de z, et on peut l'abréger $[r;\theta]$ ou encore $r\ \mathrm{cis}(\theta)$



Les coordonnées dans le plan correspondant à ces deux manière de caractériser un point par deux nombres s'appellent respectivement **coordonnées cartésiennes** et **coordonnées polaires**. Les formules ci-dessus permettent de passer d'un système à l'autre.

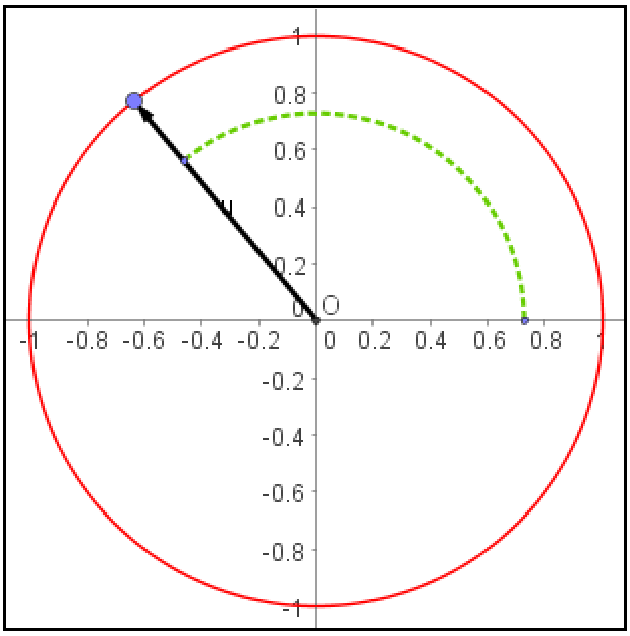
24 septembre 2007
Suite = version du 14 octobre 2007

- Nombres complexes unitaires (de module 1) et trigonométrie

[1] La calculatrice indique toujours un angle compris entre –90° et +90° comme résultat de la fonction arctan(). Si l'on se trouve dans le deuxième ou le troisième quadrant ($y < 0$), il faut alors corriger de plus ou moins un demi-tour pour obtenir la bonne valeur.

c) Nombres complexes unitaires

On a vu que la valeur absolue d'un produit est le produit des valeurs absolues : $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. Il s'ensuit que le produit et l'inverse de nombres complexes de module 1 sont encore de module 1. On les appelle «unitaires». Ils sont caractérisés par leur argument.



Représentation géométrique

– Un **vecteur** de longueur 1

– Un **point** du «cercle trigonométrique»

– La multiplication par un nombre complexe unitaire correspond à une **rotation** d'angle φ, où φ, est l'argument du nombre complexe.

Ainsi donc, les nombres complexes unitaires **se multiplient entre eux**, et l'inverse d'un nombre complexe unitaire est encore unitaire : ils forment un *groupe* qui a les mêmes propriétés que le groupe des rotations autour du point O.

d) Formules d'addition de trigonométrie

La multiplication des nombres complexes unitaires correspond à la composition des rotations. Ainsi donc, dans une multiplication, les arguments s'additionnent. Cela permet de trouver par la multiplication des nombres complexes les formules d'addition des angles de trigonométrie. (Cf. Formulaire et tables, bas p. 29)

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \cos(\varphi_1) + \sin(\varphi_1)i = cis(\varphi_1) \\ z_2 &= \cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_2)i = cis(\varphi_2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$z_1 \cdot z_2 = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2)i = cis(\varphi_1 + \varphi_2)$$

En effectuant la multiplication, on trouve donc :

Partie réelle : $\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)$

Partie imaginaire : $\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + \sin(\varphi_1)\cos(\varphi_1)$

Inverse et division

L'inverse d'un nombre complexe unitaire est égal à son conjugué

La division de deux nombres complexes unitaires s'effectue en soustrayant leurs arguments.

$$z = \cos(\varphi) + \sin(\varphi)i = cis(\varphi) \Rightarrow \tfrac{1}{z} = z^{-1} = \overline{z} = \cos(\varphi) - \sin(\varphi)i$$

Division :

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \cos(\varphi_1) + \sin(\varphi_1)i = cis(\varphi_1) \\ z_2 &= \cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_2)i = cis(\varphi_2) \\ \overline{z_2} &= \cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_2)i = cis(-\varphi_2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\tfrac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \overline{z_2} = \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2)i = cis(\varphi_1 - \varphi_2)$$

En effectuant la multiplication, on trouve donc :

Partie réelle : $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)$

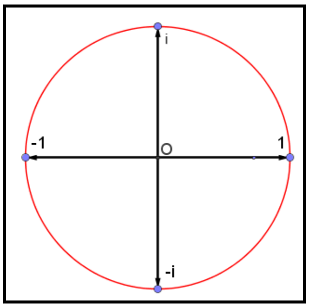
Partie imaginaire : $\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\cos(\varphi_1)$

e) Formule de Moivre

Cette même méthode permet de trouver les formules pour les fonctions trigonométriques des multiples d'un angle : $\boxed{[\cos(\varphi)+\sin(\varphi)i]^n=\cos(n\cdot\varphi)+\sin(n\cdot\varphi)i}$

Exercice :
Effectuer le calcul pour $n=2$ et $n=3$ afin de trouver les formules trigonométriques pour $\cos(2\varphi), \sin(2\varphi), \cos(3\varphi)$ et $\cos(3\varphi)$

f) Racines $n^{\text{ème}}$ de 1



On a déjà observé que $i^2=(-i)^2=-1$, donc $i^4=(-i)^4=+1$.
Mais on a aussi $(-1)^4=1^4=1$

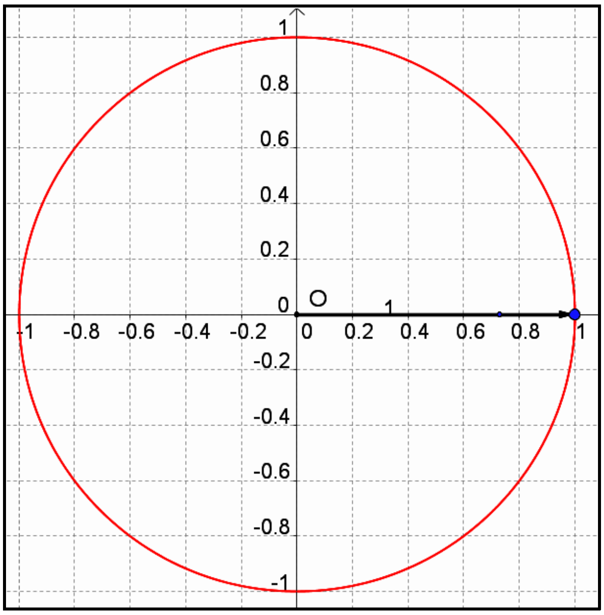
- On a donc *quatre nombres complexes* dont la puissance 4 donne 1 : $i, -i, -1$, et 1
- Ce sont les *quatre solutions* de l'équation $x^4=1$ dans $\mathbb{C}$
- Cette équation du 4^e^ degré a donc 4 solutions dans $\mathbb{C}$, alors qu'elle n'en a que 2 dans $\mathbb{R}$.
- Représentation géométrique : quatre points, ou quatre vecteurs, ou les quatre rotations d'angles 0˚, 90˚, 180˚, 270˚.
- Ces angles sont simplement les *multiples d'un quart de tour*

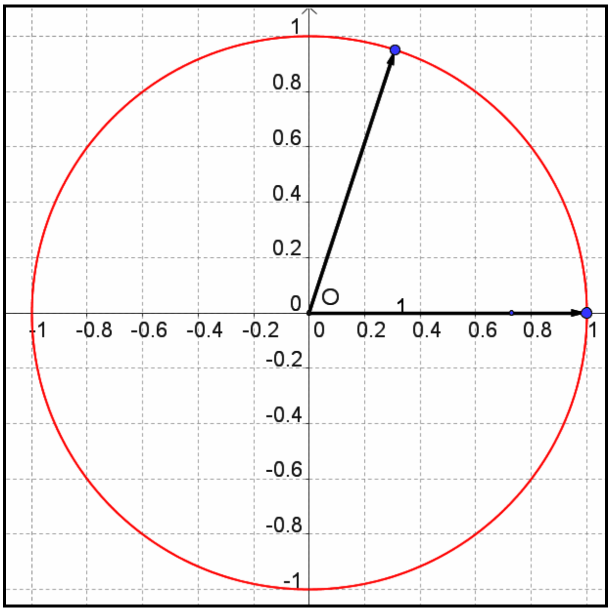
Pour n'importe quel entier, la situation est analogue.

- Les racines n^{e} de l'unité sont les nombres complexes unitaires dont les arguments sont les n nombres complexes $\frac{k}{n}\cdot 360° = \frac{k}{n}\cdot 2\pi\text{rad}, k=0\ldots n-1$

Exercice : calculer par la trigonométrie et dessiner au haut de la page suivante

- les 3 racines cubiques (dessin de gauche) de l'unité
- les 5 racines 5^{e} (dessin de droite) de l'unité





g) Multiplication et division des nombres complexes quelconques en représentation trigonométrique

Dans la multiplication, les *modules se multiplient* et les *arguments s'additionnent*.
Dans la division, les *modules se divisent* et les *arguments se soustraient.*
Si l'on représente en abrégé $z = r(\cos\theta + \sin\theta i) = [r;\theta]$,

on aura donc : $\boxed{[r_1;\theta_1]\cdot[r_2;\theta_2] = [r_1\cdot r_2;\theta_1+\theta_2]}$ et $\boxed{\frac{[r_1;\theta_1]}{[r_2;\theta_2]} = [\frac{r_1}{r_2};\theta_1-\theta_2]}$

h) Puissances et racines entières en représentation trigonométrique

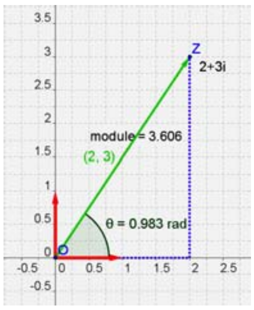
Pour élever un nombre complexe à la puissance n, on élève le module à la puissance n et on multiplie l'argument par n. On aura donc $\boxed{[r;\theta]^n = [r^n; n\cdot\theta]}$

Pour les racines n^e, on ne peut pas utiliser le symbole de racines car il y a n racines, sans possibilité d'en sélectionner une particulière.
Pour le module, on prend la racine n^e (dans $\mathbb{R}^+$)
Pour l'argument, on divise par n (mais là, il y a n solutions possibles, car on peut ajouter des n^e de tours.

On a donc les n racines : $\boxed{[\sqrt[n]{r};\frac{\theta}{n}+k\cdot\frac{1}{2\pi}], k = 0\ldots n-1}$

5. Tableau résumé

Tous les calculs se font avec les règles de l'algèbre et l'égalité $i^2 = -1$

Posons $z = x + yi$, idem avec les indices 1 et 2 Parties réelles et imaginaires : $x = \mathrm{Re}(z) = \Re(z); \quad y = \mathrm{Im}(z) = \Im(z)$	***Interprétation géométrique*** – Point de coordonnée $(x; y)$ – Vecteur de composantes $\binom{x}{y}$
Addition $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$	Addition des vecteurs
Multiplication $z_1 \cdot z_2 = \underbrace{(x_1x_2 - y_1y_2)} + \underbrace{(x_1y_2 + x_2y_1)}\, i$ $\begin{array}{cccc} x_1 & y_1 & x_1 & y_1 \\ \vert & \vdots & \times & \\ x_2 & y_2 & x_2 & y_2 \end{array}$	La multiplication par un nombre complexe donné représente une similitude de centre *O*, composée de – homothétie de rapport *r* – rotation d'angle θ (voir forme trigonométrique)
Conjugaison $z \mapsto \overline{z}$ est un automorphisme de $\mathbb{C}$ $\overline{z} := x - yi \qquad \overline{\overline{z}} = z$ $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ $\overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 = \vert z\vert^2$ $z + \overline{z} = 2x = 2\Re(z)$ $z - \overline{z} = 2yi = 2\Im(z)i$ $\Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ $\Im(z) = \frac{z+\overline{z}}{2i}$	$z \mapsto \overline{z}$ représente une symétrie d'axe *Ox*
Module : $\vert z\vert = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$ $\vert z_1 + z_2\vert \leq \vert z_1\vert + \vert z_2\vert \qquad (**)$ $\vert z_1 \cdot z_2\vert = \vert z_1\vert \cdot \vert z_2\vert$ **Inverse :** $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{\vert z\vert^2}$	Le *module* représente la *norme* du vecteur correspondant L'inégalité du milieu (**) correspond à l'*inégalité triangulaire* sur les longueurs des côtés d'un triangle
Forme trigonométrique $z = x + yi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $= \underbrace{r\mathrm{cis}\theta = [r;\theta]}_{\text{abréviations}}$  	L'*argument* θ représente l'angle du vecteur avec l'axe *Ox*, et l'angle de la similitude correspondant à la multiplication par *z*
Formules de **conversion** $x = r\cos\theta; \; y = r\sin\theta$ $r = \vert z\vert = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$ $\cos(\theta) = \frac{x}{\vert z\vert}; \; \sin(\theta) = \frac{y}{\vert z\vert}$	Pour trouver l'argument d'un nombre complexe donné sous forme cartésienne, tenir compte du quadrant dans lequel on se trouve
Multiplication en forme trigonométrique $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\mathrm{cis}(\theta_1 + \theta_2)$ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\mathrm{cis}(\theta_1 - \theta_2)$ $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\mathrm{cis}(-\theta)$	Permet de trouver les formules de trigonométries pour les cos et sin de sommes ou de différence d'angles
Formule de Moivre abrégée $(\mathrm{cis}\theta)^n = \mathrm{cis}(n\theta)$	Donne la formule pour les cos et sin de multiples d'un angle.

6. Inversion des fonctions trigonométriques

Notation :

- Sur les calculatrices, les fonctions «inverses» – ou plutôt «réciproques» – des fonctions trigonométriques sont notées SIN^{-1} COS^{-1} TAN^{-1}
- Dans les textes mathématiques, on utilise plutôt les notations **arcsin arccos arctan**

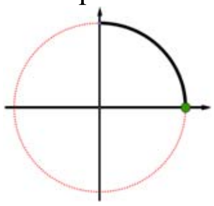
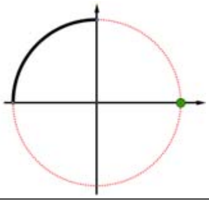
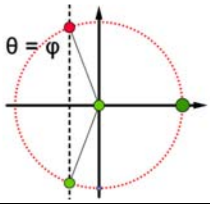
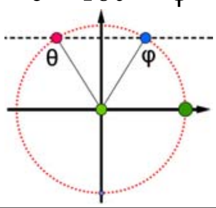
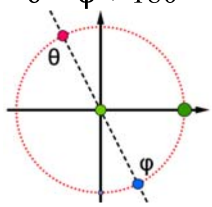
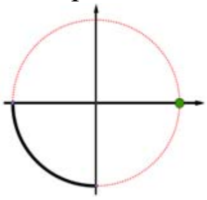
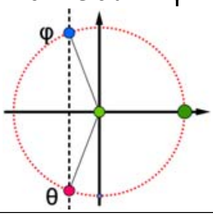
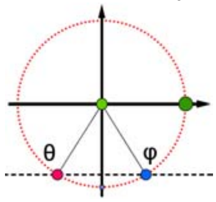
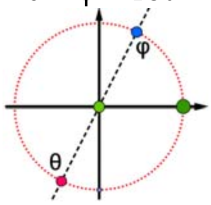
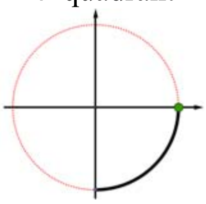
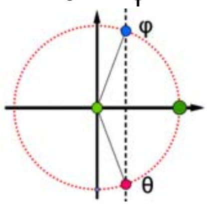
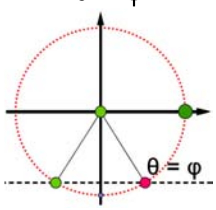
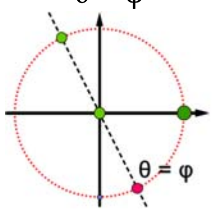
(à cause de la confusion possible avec $x^{-1} = \frac{1}{x}$)

Valeurs multiples

La valeur numérique d'un angle n'est déterminée qu'à un tour près (360° = 2π radians).
Si on connaît le cos, le sin ou la tan d'un angle, il y a en général **deux** valeurs possibles (à un tour près) pour l'angle, et la calculatrice n'en donne **qu'un**. Il faut donc faire une vérification et au besoin un petit calcul pour trouver la bonne valeur.
La calculatrice donne des valeurs

- dans l'intervalle]–90° ; +90°] (en radians : $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$) pour arcsin et arctan
- dans l'intervalle]–0° ; +180°] (en radians : $]0;\pi]$) pour arccos

Tableau des cas de figure possibles

Quadrant	COS	SIN	TAN
1er quadrant 	Pas de problème dams le premier quadrant : la calculatrice donne la bonne valeur ! Pour les autres quadrants, notons θ l'angle cherché, et φ l'angle donné par la calculatrice, Ci-dessous, les valeurs de θ sont données entre –90° et +270° On peut toujours ajouter ou soustraire 360° En radians : 180° = π 360° = 2π		
2e quadrant 	θ = θ 	θ = 180° – φ 	θ = φ + 180° 
3e quadrant 	θ = 360° – φ 	θ = 180° – φ 	θ = φ + 180° 
4e quadrant 	θ = –φ 	θ = φ 	θ = φ 

Observation : on a **trois transformation géométriques** possibles entre ces deux angles :

- symétrie d'axe vertical : . . . . . θ = 180° –φ
- symétrie d'axe horizontal : . . . θ = –φ (+ 360° au besoin)
- demi-tour : . . . . θ = φ + 180°

III. Exercices

1. en préparation ....