2MR02 – Nombres complexes – Exercices
(semaine du 25 au 28 septembre 2007)

1. On se donne $z = 0,3 + 0,4i$
Calculer $z, z^2, z^3, z^3, z^4, z^5, z^6$
Calculer le **module et l'argument** de ces nombres
Noter tous les **résultats dans un tableau** de ce type
Dessiner la représentation de ces nombres

nombre	$x + yi$	module	argument
z			
z^2			
z^3			
etc.			

2. **Même exercice** pour la série $z, z^2, z^3, \frac{1}{z} = z^{-1}$ pour $z = 1 + \sqrt{3}i$

3. **Résoudre** dans $\mathbb{C}$ les deux **équations du second degré** suivantes (en appliquant la formule de résolution des équations de second degré et le fait que les racines carrés d'un nombre réel négatif sont des nombres imaginaires : les racines carrées de –25 sont $5i$ et $-5i$.
a) $z^2 + 4z + 13 = 0$
b) $2z^2 - 6z + 17 = 0$
Dans chaque cas, **calculer la somme et le produit** des deux solutions et **vérifier la règle** déjà connue pour les nombres réels : si x_1 et x_2 sont les deux zéros du trinôme $ax^2 + bx + c$, alors $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

4. **Recherche algébrique de racines carrée**s dans $\mathbb{C}$
a) Un exemple : On veut trouver les racines carrées du nombre $a = 5 + 12i$
Posons $z = x + iy$. Alors $z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$
L'équation complexe $z^2 = 5 + 12i$ donne alors un système d'équations réelles du second degré : $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = 12 \end{cases}$ La deuxième équation donne $y = \frac{6}{x}$
Par substitution dans la première, il vient $x^2 - \frac{36}{x^2} - 5 = 0$
Puis, en amplifiant, il vient : $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$. Cette équation du 4e degré se ramène au second degré par la substitution $x^2 = t$, qui donne $t^2 - 5t - 36 = 0$
Cette équation en t a pour solutions : $t = 9$ ou $t = -4$
La deuxième solution est à écarter, car t doit être un réel non négatif puisque $t = y^2$
On obtient alors $x = \pm 3$, et par substitution, les valeurs correspondantes de y, ± 2
Les racines carrées de $5 + 12i$ sont donc $z = \pm(3 + 2i)$

b) Suite de l'exemple : **écrire *a* et ses racines sous forme trigonométrique** (avec module et argument – voir théorie p. 14) et les **représenter géométriquement (dessin!)**

c) **Faire de même** avec les racines carrées de $-2 + 1.5i$ (résolution **algébrique**, mise sous la forme **trigonométrique**, représentation **géométrique**)

d) Une astuce : comme on sait que le module d'un produit est le produit des modules, le module d'une racine carrée doit aussi être la racine carrée du module.
Comme le module de a est 13, le module des racines carrées cherché doit être $\sqrt{13}$
Cela nous donne une troisième équation complexe, $|z| = \sqrt{13}$, ou encore $|z|^2 = 13$,
qui donne comme équation réelle $x^2 + y^2 = 13$
On peut remplacer l'une des deux équations du système par celle-ci, et on obtient un système plus simple à résoudre, car on peut éliminer une inconnue par addition et soustraction :
du second degré : $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$. **Terminer le problème en résolvant ce système**

e) **Appliquer la même astuce** au calcul des racines carrées de $-2 + 1.5i$