4 Exercices

1 L'ensemble des nombres complexes

1.1 Exprimer les nombres complexes suivants sous la forme $a+bi$:

a) $(1+4i)+(2-3i)$ b) $(8+5i)+(-8-5i)$

c) $(1+i)-(2-6i)$ d) $(3-5i)+(-2-4i)-(1-2i)$

e) $3(5-2i)+2(7-i)-3(4-3i)$ f) $(9+5i)(2-7i)$

g) $(3+2i)(3-2i)$ h) $(3-4i)^2$

i) $(1+i)^4$ j) $\dfrac{1}{i}$

k) $\dfrac{1}{2+3i}$ l) $\dfrac{1+i}{1-i}$

m) $\dfrac{5+3i}{2+4i}$ n) $\left(\dfrac{63+16i}{4+3i}\right)^2$

1.2 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous :

a) $2z-3+i=0$ b) $(1-4i)z=6-7i$ c) $(1+2i)z=(5-i)z+7+26i$

1.3 Le nombre complexe i et ses mystères...

a) Calculer i, i^2, i^3, i^4, i^5, ... Représenter ces valeurs sur le plan complexe. Donner une formule générale pour i^n, où n est un entier naturel.

b) Soit $z=4+3i$. Calculer zi, zi^2, zi^3 et zi^4. Représenter ces valeurs sur le plan complexe. Que constatez-vous géométriquement ?

1.4 Déterminer le conjugué des nombres complexes $z_1=5-4i$, $z_2=-8-i$, $z_3=2+3i$ et $z_4=5-\dfrac{3}{2}i$. Représenter le tout sur le plan complexe.

1.5 Calculer $(7-8i)\overline{(8-7i)}-\overline{(4+3i)}(4-2i)$.

1.6 Poser $z=x+yi$ et résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous :

a) $8z+5\bar{z}=4+3i$ b) $z^2+2\bar{z}+5=0$ c) $2Im(\bar{z}+1)+2iRe(-z+2)=-1-12i$

1.7 Montrer que si w est une solution de l'équation réelle $az^2+bz+c=0$, alors $\bar{w}$ en est une aussi.

1.8 Soit z un nombre complexe. Démontrer que $\bar{\bar{z}}=z$, $z+\bar{z}=2Re(z)$ et $z-\bar{z}=2Im(z)i$.

1.9 Calculer le module des nombres complexes ci-dessous :

a) $2+3i$ b) $1+i$ c) $2i$ d) $-3i$ e) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ f) 4 g) -5 h) $\cos(\theta)+i\sin(\theta)$

1.10 Soit z un nombre complexe. Démontrer que $|\bar{z}|=|z|$ et $z\bar{z}=|z|^2$.

1.11 Soit U l'ensemble des nombres complexes de module 1. Montrer que le produit, le conjugué et l'inverse d'éléments de U est encore dans U. Est-ce aussi vrai pour la somme et l'opposé d'éléments de U ?

1.12 Soit a et b des nombres complexes. Simplifier les expressions :

a) $\overline{a+\bar{b}}-(\bar{a}+b)$ b) $\bar{a}b\overline{\left(\frac{\bar{a}}{b}\right)}$ c) $\overline{(a\bar{b})^3\left(\frac{b}{a}\right)^3}$ d) $\overline{(a+b)a}-\overline{b(\bar{a}+\bar{b})}$ e) $\overline{(a+b)^2}-(\bar{a}-\bar{b})^2$

2 Forme trigonométrique des nombres complexes

2.1 Écrire les nombres complexes ci-dessous sous forme trigonométrique :

a) 1 b) i c) -2 d) $-1-i$ e) $-1-\sqrt{3}i$ f) $3+4i$ g) $12+5i$

2.2 Écrire les nombres complexes ci-dessous sous forme algébrique :

a) $[4;-\frac{\pi}{3}]$ b) $[\frac{3}{4};\frac{3\pi}{4}]$ c) $[\pi;-\pi]$ d) $[4;\frac{\pi}{3}]$ e) $[1;-\frac{\pi}{2}]$

2.3 Calculer :

a) $[2;\frac{\pi}{4}][3;\frac{\pi}{6}]$ b) $[6;\frac{2\pi}{3}]\div[3;-\frac{\pi}{3}]$ c) $[2;\frac{\pi}{3}]^3$

2.4 Calculer :

a) $(1+\sqrt{3}i)^7$ b) $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+\sqrt{3}i}\right)^9$ c) $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$

2.5 Déterminer les formules de $\sin(4\theta)$ et $\cos(4\theta)$.

2.6 Déterminer :

a) la forme trigonométrique des nombres complexes z tel que $z^4=1+i$,

b) la forme algébrique des nombres complexes z tel que $z^4=24i-7$.

2.7 Déterminer sous forme trigonométrique et représenter dans le plan complexe :

a) les racines septièmes de l'unité,

b) les solutions de l'équation $z^5=-32$.

2.8 Déterminer sous forme algébrique les racines carrées complexes des nombres ci-dessous :

a) 1 b) i c) $-i$ d) 4 e) -9 f) $3+4i$ g) $-5+12i$

3 Propriétés algébriques des nombres complexes

3.1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous :

a) $z^2 = 25$ b) $z^2 = -4$ c) $2z^2 + 10z + 17 = 0$

d) $z^2 + 3z - 5 = 0$ e) $z^2 - 3(1+i)z + 6 + 7i = 0$ f) $(1+2i)z^2 - (7+4i)z + 5 - 5i = 0$

3.2 Décomposer dans $\mathbb{R}[z]$ et $\mathbb{C}[z]$ les polynômes ci-dessous :

a) $z^4 - 1$ b) $z^4 + 1$ c) $z^3 + 1$ d) $z^6 - 1$ e) $z^8 - 1$ f) $z^6 + 9z^4 + 27z^2 + 27$

3.3 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous :

a) $z^4 - (6+3i)z^3 + (8+12i)z^2 = 0$,

b) $z^3 + 2z^2 + (-4+4i)z + 16 + 16i = 0$, sachant que -4 est un zéro,

c) $z^3 - 4z^2 + (8+i)z - 7 + i = 0$, sachant que $1-i$ est un zéro.

3.4 Démontrer que tout polynôme à coefficients réels de degré impair admet au moins un zéro réel.

5 Solutions

1 L'ensemble des nombres complexes

1.1
a) $3+i$; b) $0+0i$; c) $-1+7i$; d) $0-7i$; e) $17+i$; f) $53-53i$; g) $13+0i$; h) $-7-24i$; i) $-4+0i$; j) $0-i$; k) $\frac{2}{13}-\frac{3}{13}i$; l) i ; m) $\frac{11}{10}-\frac{7}{10}i$; n) $119-120i$.

1.2
a) $\frac{3-i}{2}$; b) $2+i$; c) $2-5i$.

1.3
a) Pour tout entier naturel n , on a : $i^{4n}=1$, $i^{4n+1}=i$, $i^{4n+2}=-1$, $i^{4n+3}=-i$;
b) $-3+4i$, $-4-3i$, $3-4i$, $4+3i$, multiplier par i revient à effectuer une rotation de $90\,^\circ$ autour de l'origine.

1.4
$5+4i$, $-8+i$, $2-3i$, $5+\frac{3}{2}i$.

1.5
$102+5i$.

1.6
a) $S=\{\frac{4}{13}+i\}$, b) $S=\{1\pm 2\sqrt{2}i\}$, c) $S=\{8+\frac{1}{2}i\}$.

1.7
-

1.8
-

1.9
a) $\sqrt{13}$; b) $\sqrt{2}$; c) 2 ; d) 3 ; e) 1 ; f) 4 ; g) 5 ; h) 1 .

1.10
-

1.11
somme : non, opposé : oui.

1.12
a) $0+0i$; b) a^2 ; c) $|b|^6$; d) $|a|^2-|b|^2$; e) $4\overline{ab}$.

2 Forme trigonométrique des nombres complexes

2.1
a) $[1;0]$; b) $[1;\dfrac{\pi}{2}]$; c) $[2;\pi]$; d) $[\sqrt{2};\dfrac{5\pi}{4}]$; e) $[2;\dfrac{4\pi}{3}]$; f) $[5;53,13°]$; g) $[13;22,62°]$.

2.2
a) $2-2\sqrt{3}i$; b) $\dfrac{-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}i}{8}$; c) $-\pi$; d) $2+2\sqrt{3}i$; e) $-i$.

2.3
a) $[6;\dfrac{5\pi}{12}]$; b) $[2;\pi]$; c) $[8;\pi]$.

2.4
a) $64+64\sqrt{3}i$; b) 1 ; c) $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

2.5
$\cos(4\theta)=\cos^4(\theta)-6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)+\sin^4(\theta)$, $\sin(4\theta)=4\cos^3(\theta)\sin(\theta)4\cos(\theta)\sin^3(\theta)$.

2.6
a) $[\sqrt[8]{2};\dfrac{\pi}{16}]$, $[\sqrt[8]{2};\dfrac{9\pi}{16}]$, $[\sqrt[8]{2};\dfrac{17\pi}{16}]$, $[\sqrt[8]{2};\dfrac{25\pi}{16}]$; b) $2+i$, $-2-i$, $1-2i$, $-1+2i$.

2.7
a) $[1;0]$, $[1;\dfrac{2\pi}{7}]$, $[1;\dfrac{4\pi}{7}]$, $[1;\dfrac{6\pi}{7}]$, $[1;\dfrac{8\pi}{7}]$, $[1;\dfrac{10\pi}{7}]$, $[1;\dfrac{12\pi}{7}]$; b) $[2;\dfrac{\pi}{5}]$, $[2;\dfrac{3\pi}{5}]$, $[2;\pi]$, $[2;\dfrac{7\pi}{5}]$, $[2;\dfrac{9\pi}{5}]$.

2.8
a) ±1 ; b) $\pm(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i)$; c) $\pm(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i)$; d) ±2 ; e) $\pm3i$; f) $\pm(2+i)$; g) $\pm(2+3i)$.

3 Propriétés algébriques des nombres complexes

3.1
a) $S=\{\pm5\}$, b) $S=\{\pm2i\}$, c) $S=\{\dfrac{-5\pm3i}{2}\}$, d) $S=\{\dfrac{-3\pm\sqrt{29}}{2}\}$, e) $S=\{2-i;1+4i\}$, f) $S=\{3-i;-i\}$.

3.2
a) $(z^2+1)(z+1)(z-1)\in\mathbb{R}[z]$, $(z+i)(z-i)(z+1)(z-1)\in\mathbb{C}[z]$;
b) $(z^2+\sqrt{2}z+1)(z^2-\sqrt{2}z+1)\in\mathbb{R}[z]$, $(z-\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}})(z-\dfrac{-1-i}{\sqrt{2}})(z-\dfrac{1+i}{\sqrt{2}})(z-\dfrac{1-i}{\sqrt{2}})\in\mathbb{C}[z]$;
c) $(z+1)(z^2-z+1)\in\mathbb{R}[z]$, $(z+1)(z-\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2})(z-\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2})\in\mathbb{C}[z]$;
d) $(z+1)(z^2-z+1)(z-1)(z^2+z+1)\in\mathbb{R}[z]$,
$(z+1)(z-\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2})(z-\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2})(z-1)(z-\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2})(z-\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2})\in\mathbb{C}[z]$;

e) $(z^2+\sqrt{2}z+1)(z^2-\sqrt{2}z+1)(z^2+1)(z+1)(z-1) \in \mathbb{R}[z]$,
$(z-\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}})(z-\dfrac{-1-i}{\sqrt{2}})(z-\dfrac{1+i}{\sqrt{2}})(z-\dfrac{1-i}{\sqrt{2}})(z+i)(z-i)(z+1)(z-1) \in \mathbb{C}[z]$;
f) $(z^2+3)^3 \in \mathbb{R}[z]$, $(z+\sqrt{3}i)^3(z-\sqrt{3}i)^3 \in \mathbb{C}[z]$;

3.3
a) $S=\{0;4;2+3i\}$, b) $S=\{4;2i;2-2i\}$, c) $S=\{1-i;2-i;1+2i\}$.

3.4
-