Puissances et racines – Exercice 6.1 n et suivants, p. 36
Résolution expliquée du 6.1 n

Ces exercices ont une subtilité qu’il n’est pas évident de découvrir...
Les précédents se résolvent en mettant tout sous forme d’une égalité de puissances d’un même nombre. Pour celui-ci et les suivants, ce n’est plus possible.
Il faut alors **appliquer une méthode dite de changement de variable**.

Le **changement de variable est une méthode générale** qui permet souvent de simplifier des résolutions d’équations quand une les méthodes directes ne donnent rien, et qui est illustrée par la résolution expliquée de cet exercice 6.n :

$3^{4x+4} - 4 \bullet 3^{2x+3} + 27 = 0$	remplacer 27 par une puissance de 3
$3^{4x+4} - 4 \bullet 3^{2x+3} + 3^3 = 0$	diviser par 3^3
$3^{4x+1} - 4 \bullet 3^{2x} + 1 = 0$	la puissance avec inconnue qui peut être extraite de cette expression est 3^{2x}, car $3^{4x+1} = 3 \bullet 3^{4x} = 3 \bullet (3^{2x})^2$, et l’équation s’écrit alors :
$3 \bullet (3^{2x})^2 - 4 \bullet 3^{2x} + 1 = 0$	on pose maintenant $y = 3^{2x}$ et l’équation devient, en remplaçant 3^{2x} par y (c’est ce qu’on appelle un «changement de variable») :
$3y^2 - 4y + 1 = 0$	cette équation est alors très simple à résoudre : elle donne deux solutions : $y = 1$ ou $y = \frac{1}{3}$

On revient à l’inconnue x en utilisant le changement de variable $y = 3^{2x}$ dans l’autre sens, en remplaçant y par 3^{2x} dans la solution ci-dessus. Il ne reste donc plus qu’à résoudre les deux équations ci-dessous (une pour chaque solution) :

- $3^{2x} = 1$: $\quad 3^{2x} = 1 \iff 3^{2x} = 3^0 \iff 2x = 0 \iff x = 0$
- $3^{2x} = \frac{1}{3}$: $\quad 3^{2x} = \frac{1}{3} \iff 3^{2x} = 3^{-1} \iff 2x = -1 \iff x = -\frac{1}{2}$

L’équation donnée a donc deux solutions, $x = 0$ ou $x = -\frac{1}{2}$

Vérification :

1ère solution : $\underbrace{\underbrace{3^{4\cdot 0+4}}_{3^4=81} - \underbrace{4\cdot 3^{2\cdot 0+3}}_{4\cdot 3^3=4\cdot 27} + 27}_{81-4\cdot 27+27=0\text{: OK}} \stackrel{?}{=} 0$; 2e solution : $\underbrace{\underbrace{3^{4\cdot\frac{-1}{2}+4}}_{3^2=9} - \underbrace{4\cdot 3^{2\cdot\frac{-1}{2}+3}}_{4\cdot 3^2=36} + 27}_{9-36+27=0\text{: OK}} \stackrel{?}{=} 0$