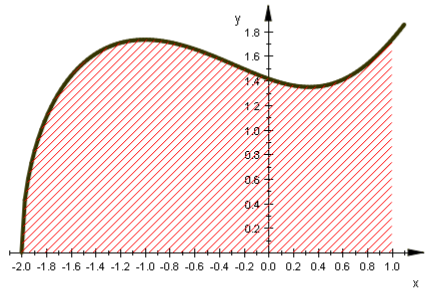
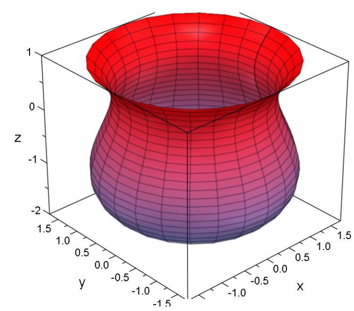
Classe 3M6 – Analyse
Test analyse – 6 février 2007

Corrigé	

1. Calculer le volume d'un vase dont la forme est déterminée par la portion de la courbe d'équation $y^2 = (2+x)(x^2-x+1)$ située entre le point où la courbe coupe l'axe Ox et la droite [$x = 1$], et en faisant tourner cette courbe autour de l'axe Ox.





La courbe coupe l'axe Ox au point $x = -2$
Découpage en disques

1) rayon des disques : r = $r = \sqrt{(2+x)(x^2-x+1)}$

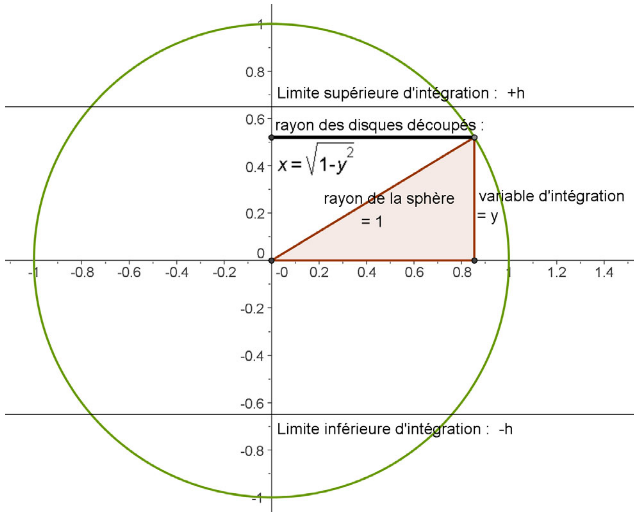
2) aire des disques : $S = \pi r^2$ – 3) volume :

$$V = \pi \underbrace{\int_{-2}^{1} (2+x)(x^2-x+1)}_{f(x)} dx$$

$$f(x) = x^3 + x^2 - x + 2 \rightarrow \text{primitive: } F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \ \ (+C)$$

$$V = \pi F(x)\Big|_{-2}^{1} = \pi\left[\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right)-\left(\frac{16}{4}+\frac{-8}{3}-\frac{4}{2}-4\right)\right] = \frac{27\pi}{4} \cong 21{,}2$$

2. **a)** On considère une sphère de rayon 1. Calculer le volume de cette sphère situé entre deux plans parallèles à l'«équateur» à une distance h de ce dernier.



Découpage en disques

1) rayon des disques : r = $r = \sqrt{(1+y^2)}$

2) aire des disques : $S = \pi r^2 = \pi(1-y)^2$

3) calcul du volume en fonction de h :

$$V(h) = \pi\int_{-h}^{h} \underbrace{(1-y^2)}_{\text{fonction paire!}} dy = 2\pi\int_{0}^{h}(1-y^2)dy =$$

$$2\pi\left(y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^h = 2\pi\left(h-\frac{h^3}{3}\right) = \frac{2\pi h(3-h^2)}{3}$$

On peut naturellement placer les plans «verticalement» et prendre alors x comme variable d'intégration. Le calcul est identique...

b) Vérifier que cela donne bien le volume de la sphère pour $h = 1$, et calculer la proportion du volume obtenue en plaçant les deux plans à mi-distance entre les pôles et l'équateur.

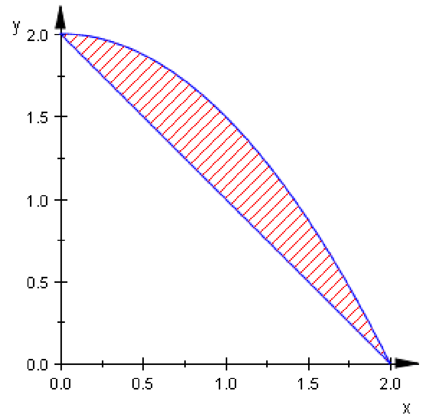
$$V(h) = \frac{2\pi h(3-h^2)}{3} \quad \rightarrow \quad V(1) = \frac{2\pi(3-1)}{3} = \frac{4\pi}{3} \ :$$

on retrouve bien la formule du volume de la sphère

Proportion du volume avec les plans à mi-distance :

$$\frac{V(\frac{1}{2})}{V(1)} = \frac{\frac{1}{2}(3-\frac{1}{4})}{1(3-1)} = \frac{(3-\frac{1}{4})}{4} = \frac{11}{16} = 68{,}75\%$$

3. On considère la surface limitée par une parabole d'équation $y = 2 - \frac{x^2}{2}$ et la droite qui coupe les axes de coordonnées au même endroit.. Calculer le volume obtenu en faisant tourner cette surface autour de l'axe des y. *[Le plus facile est d'effectuer un découpage en forme de tranches cylindriques]*



Etude des courbes et des fonctions
La parabole a pour sommet le point S(0;2), elle est tournée vers le bas et coupe l'axe des x (sur la partie de droite) au point T(2;0).
La droite TD a alors pour équation $y = 2 - x$

Calcul du volume

Découpage par tranches cylindriques, en fonction de la variable x,

1) Hauteur et rayon des cylindres : $h = \left(2 - \frac{x^2}{2}\right) - \left(2 - x\right) = x - \frac{x^2}{2}$ $\qquad r = x$

2) Surface d'un cylindre : $S = 2\pi r \cdot h = 2\pi x\left(x - \frac{x^2}{2}\right) = \pi\left(2x^2 - x^3\right)$

3) $V = \pi\int_0^2 \left(2x^2 - x^3\right)dx = \pi\left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 = \pi\left(\frac{16}{3} - \frac{16}{4}\right) = \frac{4\pi}{3}$

Autre méthode : on peut aussi, mais c'est plus compliqué, faire un découpage par tranches en forme de couronnes – en fonction de la variable y

1) Rayon des couronnes :

Rayon intérieur de la couronne: $r_1 = 2 - y$

Rayon extérieur : pour trouver r_2, il faut résoudre l'équation $y = 2 - \frac{x^2}{2}$ en fonction de x:

$\frac{x^2}{2} = 2 - y \ \rightarrow \ x^2 = 2(2-y) \ \rightarrow x = \sqrt{2(2-y)}$; on a donc $r_2 = \sqrt{2(2-y)}$

2) Aire des couronnes : l'aire d'une couronne est $S = \pi\left(r_2{}^2 - r_1{}^2\right)$

$$V = \pi\int_0^2 \left(r_2{}^2 - r_1{}^2\right)dy = \pi\int_0^2 \underbrace{\left(\left(2(2-y)\right) - (2-y)^2\right)}_{4-2y-4+4y-y^2 = 2y-y^2}dy = \pi\int_0^2 \left(2y - y^2\right)dy =$$

3) Volume :

$$\pi\left[y^2 - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \pi\left(4 - \frac{8}{3}\right) = \frac{4\pi}{3}$$