A

Classe 3M6 – Analyse

Test analyse – 3 novembre 2006

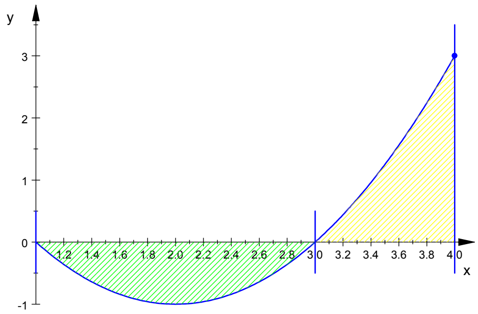
Corrigé

1. a) $\int_1^4 \underbrace{(x^2-4x+3)}_{f(x)}\,dx \;=\; \left.\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right|_1^4 \;=\; F(4)-F(1) \;=\; \left(\frac{64}{3}-2\cdot 16+12\right)-\left(\frac{1}{3}-2+3\right) \;=\; 0$

Une primitive de $f(x)$ est $F(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x$

(La constante à ajouter est superflue dans les calculs d'intégrale définie)

b) Dessiner le graphe de cette fonction et montrer à quelle(s) combinaison d'aires géométriques correspond cette intégrale.
La valeur trouvée correspond à la différence entre l'aire de la partie au-dessus de l'axe des x et de la partie en-dessous, qui sont égales puisque la somme algébrique est nulle.



2. a) $\underbrace{\int_{-2}^2 \underbrace{(x^4-3x^2+2)}_{f(x)}\,dx}_{\text{Primitive: } F(x)=\frac{x^5}{5}-x^3+2x} \;=\; F(2)-F(-2) = \underbrace{\left(\frac{32}{5}-8+4\right)}_{\frac{12}{5}}-\underbrace{\left(-\frac{32}{5}+8-4\right)}_{-\frac{12}{5}} \;=\; \frac{24}{5} \;=\; 4.8$

b) Que dire des symétries de la courbe ? f est une fonction ___**paire**____ et son graphe est **symétrique par rapport à l'axe Oy**

c) Comment peut-on simplifier le calcul d'intégrale d'après cette observation ?
En raison de cette symétrie, il suffit de calculer l'intégrale de 0 à 2 et de multiplier par 2

$$\int_{-2}^2 f(x)dx \;=\; 2\bullet \int_0^2 f(x)dx$$

3. a) $\int_{-3}^1 \underbrace{\sqrt{1-x}}_{f(x)}\,dx = \left.\frac{-2}{3}(1-x)^{3/2}\right|_{-3}^1 \;=\; F(1)-F(-3) =$

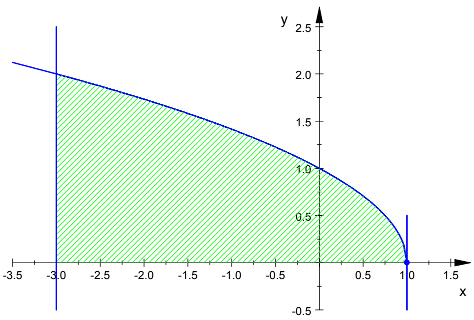
$0 - \frac{-2}{3}\bullet 4^{3/2} = \frac{2}{3}\bullet 8 = \frac{16}{3} \cong 5.33$

Pour trouver une primitive F, on écrit $f(x)=(1-x)^{1/2}$

La primitive ressemble alors à $G(x)=(1-x)^{3/2}$

Mais $G'(x) = \underbrace{(-1)}_{\text{dérivée intérieure}} \bullet \frac{3}{2}\bullet(1-x)^{1/2} = -\frac{3}{2}f(x).$

On compense donc avec un facteur $\frac{-2}{3}$: $F(x)=\frac{-2}{3}(1-x)^{3/2}$



b) Dessiner approximativement le graphe de cette fonction.

c) [Question subsidiaire : sauriez-vous déterminer la nature de la courbe?]

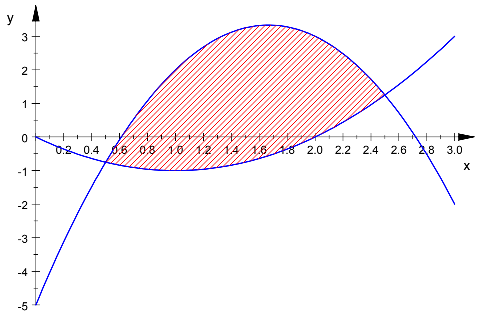
$y \;=\; \sqrt{1-x} \;\Leftrightarrow\; \left(y^2 = 1-x \text{ et } y\geq 0\right) \;\Leftrightarrow\; \left(x=1-y^2 \text{ et } y\geq 0\right)$

x s'expriment comme une fonction du second degré de y, on a une parabole tournée dans l'autre sens que d'habitude, plus précisément une demi-parabole car on ne garde que $y \geq 0$

A

Corrigé

4. a) Calculer l'aire de la surface limitée par ces deux courbes et les dessiner approximativement :



$$y=\underbrace{x^2-2x}_{f_1(x)} \quad \text{et} \quad y=\underbrace{-3x^2+10x-5}_{f_2(x)}$$

on voit que c'est le graphe de f_2 qui est au-dessus

Intersection des graphes: $f_2(x)=f_1(x)=0 \quad \rightarrow$

$$4x^2-12x+5=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{4}=\left\langle \begin{array}{l} 5/2 \\ 1/2 \end{array}\right.$$

Les points d'intersection sont alors $A(0.5;-0.75)$ et $B(2.5;1.25)$

Aire à calculer: $\int_{1/2}^{5/2}\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx = \int_{1/2}^{5/2}\left(-4x^2+12x-5\right)dx = -\frac{4}{3}x^3+6x^2-5x\Big]_{1/2}^{5/2}$

$$=\left(-\frac{4}{3}\cdot\frac{125}{8}+6\cdot\frac{25}{4}-\frac{25}{2}\right)-\left(-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{8}+6\cdot\frac{1}{4}-\frac{5}{2}\right)=\frac{-125+225-75+1-9+15}{6}=\frac{32}{6}=\frac{16}{3}$$

5. Calculer cette intégrale à 0.01 près : $\int_0^2 \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2+4x+3}}dx$

Ecrivons la racine sous forme de puissance fractionnaire.

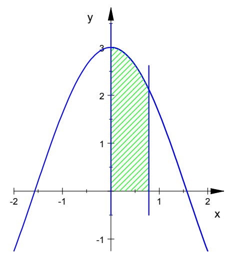
$I=\int_0^2 \underbrace{(x+2)\left(x^2+4x+3\right)^{-\frac{1}{3}}}_{f(x)}dx$ Le numérateur se rapproche d'une dérivée intérieure de la racine

Essayons... $\underbrace{\left[\left(x^2+4x+3\right)^{\frac{2}{3}}\right]'}_{G(x)}=\frac{2}{3}\cdot(2x+4)\left(x^2+4x+3\right)^{-\frac{2}{3}}=\frac{4}{3}\underbrace{(x+2)\left(x^2+4x+3\right)^{-\frac{2}{3}}}_{f(x)}$

Il faut donc corriger avec un facteur $\frac{3}{4}$: une primitive est $F(x)=\frac{3}{4}\left(x^2+4x+3\right)^{\frac{1}{3}}$

Alors $I=F(2)-F(0)=\frac{3}{4}\cdot\left(15^{2/3}-3^{2/3}\right)=4.56-1.56=3.00$

6. Calculer $\int_0^{\pi/4} 3\cos(x)dx$ et dessiner le graphe de la courbe correspondante.



$$\int_0^{\pi/4}3\cos(x)dx=3\sin(x)\Big]_0^{\pi/4}=3\left[\underbrace{\sin(\pi/4)}_{0.707}-\sin(0)\right]\cong 2.121$$

(Note: $\sin(\pi/4)=\sin(45°)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cong 0.707$)

7. Pouvez-vous dire si les fonctions suivantes sont paires, impaires, ou rien (ni l'un ni l'autre)

x^4+1	x^3-2	x^3-x	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sqrt{x^2+1}$
P	rien	I	I	P	P

Paire : fonction inchangée en remplaçant x par $-x$, graphe symétrique (axialement) relativement à Ox

Impaire : la fonction change de signe en remplaçant x par $-x$, graphe symétrique (centralement) relativement à O

B

Classe 3M6 – Analyse

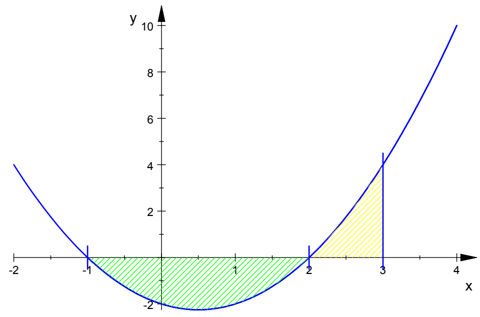
Test analyse – 3 novembre 2006

Corrigé

1. a) $\int_{-1}^{3}\underbrace{(x^2-x-2)}_{f(x)}dx \;=\; \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\Big|_{-1}^{3} \;=\; F(3)-F(-1) \;=\; (\frac{27}{3}-2\bullet\frac{9}{2}-6)-(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2) \;=\; -\frac{8}{3}$

Une primitive de $f(x)$ est $F(x) \;=\; \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x$

(La constante à ajouter est superflue dans les calculs d'intégrale définie)



b) Dessiner le graphe de cette fonction et montrer à quelle(s) combinaison d'aires géométriques correspond cette intégrale.

La valeur trouvée correspond à la différence entre l'aire de la partie au-dessus de l'axe des x et de la partie en-dessous, qui est la plus grande puisque la somme algébrique est négative.

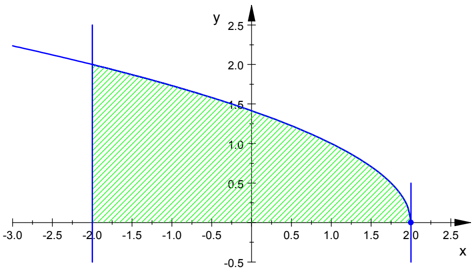
2. a) Calculer $\underbrace{\int_{-2}^{2}\underbrace{(x^4+3x^2-4)}_{f(x)}dx}_{\text{Primitive: } F(x)=\frac{x^5}{5}+x^3+-4x} \;=\; \underbrace{(\frac{32}{5}+8-8)}_{\frac{12}{5}}-\underbrace{(-\frac{32}{5}-8+8)}_{-\frac{12}{5}} \;=\; \frac{64}{5} \;=\; 12.8$

b) Que dire des symétries de la courbe ? f est une fonction ___**paire**____ et son graphe est **symétrique par rapport à l'axe Oy**

c) Comment peut-on simplifier le calcul d'intégrale d'après cette observation ?
En raison de cette symétrie, il suffit de calculer l'intégrale de 0 à 2 et de multiplier par 2

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx \;=\; 2\bullet\int_{0}^{2} f(x)dx$$

3. a) Calculer $\int_{-2}^{2}\sqrt{2-x}\,dx$



$$\int_{-2}^{2}\underbrace{\sqrt{2-x}}_{f(x)}\,dx = \frac{-2}{3}(2-x)^{3/2}\Big|_{-3}^{1} \;=\; F(2)-F(-2) =$$

$$0-\frac{-2}{3}\bullet 4^{3/2} = \frac{2}{3}\bullet 8 = \frac{16}{3} \cong 5.33$$

Pour trouver une primitive F, on écrit $f(x)=(2-x)^{1/2}$

La primitive ressemble alors à $G(x)=(2-x)^{3/2}$

Mais $G'(x) \;=\; \underbrace{(-1)}_{\text{dérivée intérieure}} \bullet \frac{3}{2}\bullet(2-x)^{1/2} = -\frac{3}{2}f(x).$

On compense donc avec un facteur $\frac{-2}{3}$: $F(x)=\frac{-2}{3}(2-x)^{3/2}$

b) Dessiner approximativement le graphe de cette fonction.

c) [Question subsidiaire : sauriez-vous déterminer la nature de la courbe?]

$y \;=\; \sqrt{2-x} \;\Leftrightarrow\; (y^2 \;=\; 2-x \text{ et } y\geq 0) \;\Leftrightarrow\; (x=2-y^2 \text{ et } y\geq 0)$

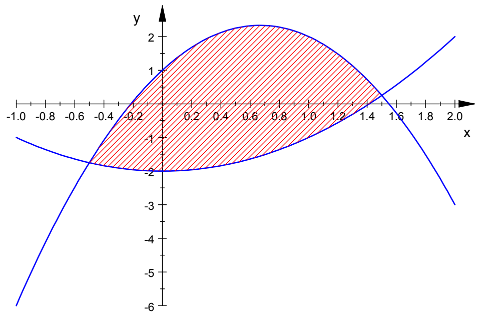
x s'expriment comme une fonction du second degré de y, on a une parabole tournée dans l'autre sens que d'habitude, plus précisément une demi-parabole car on ne garde que $y\geq 0$

B

Corrigé

4. a) Calculer l'aire de la surface limitée par ces deux courbes et les dessiner approximativement :

$$y = x^2 - 2 \quad \text{et} \quad y = -3x^2 + 4x + 1$$



$y = \underbrace{x^2 - 2}_{f_1(x)}$ et $y = \underbrace{-3x^2 + 4x + 1}_{f_2(x)}$

on voit que c'est le graphe de f_2 qui est au-dessus

Intersection des graphes: $f_2(x) = f_1(x) = 0 \;\rightarrow$

$$4x^2 - 4x - 3 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{4} = \left\langle \begin{matrix} 3/2 \\ -1/2 \end{matrix} \right.$$

Les points d'intersection sont alors $A(-0.5;\, -1.75)$ et $B(1.5;\, 0.25)$

Aire à calculer: $\int_{-1/2}^{3/2} \big(f_2(x) - f_1(x)\big)\,dx = \int_{-1/2}^{3/2} \big(-4x^2 + 4x + 3\big)\,dx = \left. -\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + 3x \right]_{-1/2}^{3/2}$

$$= \left(-\frac{4}{3}\cdot\frac{27}{8} + 2\cdot\frac{9}{4} + \frac{9}{2}\right) - \left(-\frac{4}{3}\cdot\frac{-1}{8} + 2\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{-1}{2}\right) = \frac{-27+27+27-1-3+9}{6} = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}$$

5. Calculer cette intégrale à 0.01 près : $\displaystyle\int_0^2 \frac{x+3}{\sqrt[3]{x^2+6x+1}}\,dx$

Ecrivons la racine sous forme de puissance fractionnaire.

$I = \int_0^2 \underbrace{(x+2)\left(x^2+6x+1\right)^{-\frac{1}{3}}}_{f(x)} dx$ Le numérateur se rapproche d'une dérivée intérieure de la racine

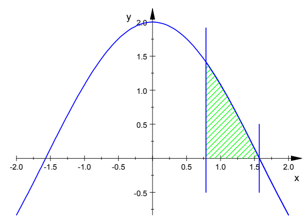
Essayons... $\underbrace{\left[\left(x^2+6x+1\right)^{\frac{2}{3}}\right]'}_{G(x)} = \frac{2}{3}\cdot(2x+6)\left(x^2+6x+1\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}\underbrace{(x+3)\left(x^2+6x+1\right)^{-\frac{2}{3}}}_{f(x)}$

Il faut donc corriger avec un facteur $\frac{3}{4}$: une primitive est $F(x) = \frac{3}{4}\left(x^2+6x+1\right)^{\frac{1}{3}}$

Alors $I = F(2) - F(0) = \frac{3}{4}\cdot\left(17^{2/3} - 1^{2/3}\right) \simeq \frac{3}{4}(6.61 - 1) \cong 4.21$

6. Calculer $\int_{\pi/4}^{\pi/2} 2\cos(x)dx$ et dessiner le graphe de la courbe correspondante.

$$\int_{\pi/4}^{\pi} 2\cos(x)dx = 2\sin(x)\Big]_{\pi/4}^{\pi} = 2\left[\underbrace{\sin(\pi)}_{1} - \underbrace{\sin(\pi/4)}_{0.707}\right] \cong 0.586$$



(Note: $\sin(\pi/4) = \sin(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0.707$)

7. Pouvez-vous dire si les fonctions suivantes sont paires, impaires, ou rien (ni l'un ni l'autre)

x^3+1	x^4-1	$\cos(x)$	$\sin(x)$	x^3-2x	$\sqrt{x^2+1}$
rien	P	P	I	I	P

Paire : fonction inchangée en remplaçant x par $-x$, graphe symétrique (axialement) relativement à Ox

Impaire : la fonction change de signe en remplaçant x par $-x$, graphe symétrique (centralement) relativement à O