Algèbre 1ère année

Exercice 4.16b

$P(x)=3x^3+10x^2+x-6$: les zéros entiers possibles sont parmi les diviseurs de 6, soit l'ensemble des 8 nombres $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. On cherche parmi ces nombres lesquels sont des zéros (on peut remplacer *x* par la valeur, mais mieux vaut utiliser le schéma de Hörner pour vérifier si reste de la division par *x–a* est nul et trouver du même coup le quotient). Ici, en essayant, on voit que cela ne peut pas marcher avec des valeurs positives, mais on voit que $P(-1) = 0$, et que le quotient est $3x^2+7x-6$. Les autres zéros sont ceux du quotient. Il se décompose assez facilement «à la main» : $3x^2+7x-6 = (3x-2)(x+3)$

3	10	1	–6
–1	–3	–7	6
3	7	–6	0

Les zéros sont alors ceux des facteurs $3x-2$ et $x+3$, à savoir $\frac{2}{3}$ et -3

On peut aussi les trouver en utilisant la formule de résolution des équations du deuxième degré, $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-1\pm\sqrt{25}}{6}$. Les zéros cherchés sont donc $-3; -1; \frac{2}{3}$

Exercice 4.17c

$P(x)=x^4-7x^3+17x^2-17x+6$: les zéros entiers possibles sont parmi les diviseurs de 6, soit l'ensemble des 8 nombres $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. On voit facilement, en observant les coefficients du polynôme, que 1–7+17–17+6 = 0, ce qui signifie que $P(1) = 0$. Ce polynôme se divise donc par *x*–1.

On obtient un quotient $Q(x)=x^4-6x^3+11x^2-6$

On peut faire les mêmes observations, et le polynôme a encore un zéro égal à 1 et se divise par *x*–1. On peut continuer la division dans le même tableau. On trouve un quotient qui se décompose à la main très facilement :

1	–7	17	–17	6
1	1	–6	11	–6
1	–6	11	–6	0
1	1	–5	6	
1	–5	6	0	

$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

Finalement, on a $P(x)=x^4-7x^3+17x^2-17x+6 = (x-1)^2(x-2)(x-3)$

(NB : ce polynôme a trois zéros, mais l'un d'eux est un zéro double)

Exercice 4.17d

$P(x)=x^4+3x^3-16x-48$

Ici, la méthode la plus simple consiste à observer une proportionnalité dans les coefficients entre 1 et 3 d'une part, –16 et –48 d'autre part, ce qui permet une décomposition par regroupement :

$$P(x)=\underbrace{x^5+3x^4}_{x^4(x+3)}\underbrace{-16x-48}_{-16(x+3)} = \underbrace{\left(x^4-16\right)}_{\left(x^2\right)^2-4^2}(x+3) = \left(x^2+4\right)\left(x^2-4\right)(x+3)$$

$$=\left(x^2+4\right)(x+2)(x-2)(x+3)$$

On ne peut pas aller plus loin, car $\left(x^2+4\right)$ est irréductible

Exercice 4.18a

$P(x)=x^3-2x^2-5x+6$

Cherchons un zéro parmi les diviseurs de 6. On voit que 1–2–5+6 = 0, donc $P(1) = 0$. Effectuons la division.
Le quotient se décompose très facilement :

1	–2	–5	6
$\boxed{1}$	1	–1	–6
1	–1	–6	0

$Q(x)=x^2-x-6=(x+2)(x-3)$

Donc $P(x)=(x-1)(x+2)(x-3)$

Exercice 4.18b

$P(x)=3x^3-11x^2+8x+4$

Cherchons un zéro parmi les diviseurs de 4. Cela marche avec 2. Effectuons la division par x–2. Le quotient se décompose assez facilement à la main :

3	–11	8	4
$\boxed{2}$	6	–10	–4
3	–5	–2	0

$Q(x)=3x^2-5x-2=(3x+1)(x-2)$

Donc $P(x)=(3x+1)(x-2)(x-2)=(3x+1)(x-2)^2$

Exercice 4.18e

$P(x)=x^3-3x^2+6$. S'il y a des zéros rationnels, ils sont représentés par des fractions dont le numérateur est un diviseur de 6 et le dénominateur un diviseur de 1 (le coefficient dominant, celui de x^3). Ce ne peut donc être que des entiers, mais aucun diviseur de 6 me «marche». Il n'y donc aucun zéro rationnel.

Exercice 4.18k

$P(x)=2x^4-10x^3+15x^2-4x-4$

On cherche un premier zéro entier parmi les diviseurs de 4. On trouve 2. On cherche un zéro entier du quotient. On trouve encore 2. Finalement, après ces deux divisions par x–2, on obtient donc $P(x) = (x-2)^2\,(2x^2-2x-1)$

2	–10	15	–4	–4
$\boxed{2}$	4	–12	6	4
2	–6	3	2	0
$\boxed{2}$	4	–4	–2	
2	–2	–1	0	

$2x^2-2x-1$ ne se décompose pas en facteurs rationnels, car le Δ de la formule de résolution des équations du 2^e^ degré vaut 12, qui n'est pas un carré parfait. Il est inutile de faire des essais...

Les zéros sont alors $\dfrac{2\pm\sqrt{12}}{4}=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$ (car $\sqrt{12}=\sqrt{4\cdot 3}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$),

et le trinôme se décompose donc ainsi : $2x^2-2x-1=2\left(x-\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

Remarques

Pour trouver les décomposition d'un trinôme du second degré, on peut

a) Raisonner par observation et essais.

Prenons l'exemple de l'exercice 4.18b, $3x^2-5x-2$. Etant donné que le coefficients de x^2 est 3 et le terme constant –2, on doit avoir des termes comme $(3x\pm ???)(x\mp ???)$, et il faudra avoir ± 2 ... ∓ 1 ou ± 1 ... ∓ 2 aux termes constants.

On voit alors que c'est $3x^2-5x-2 \;=\; (3x+1)(x-2)$ qui marche.

b) Si on ne voit pas la solution par des essais, on a le loisir de résoudre l'équation du second degré avec la formule :

$$3x^2-5x-2=0 \;\rightarrow\; x=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{6}=\left\langle \begin{array}{l} 12/6=2 \\ -2/6=-1/3 \end{array}\right.$$

Le polynôme se décompose alors ainsi :

$$\underbrace{3}_{***}x^2-5x-2 \;=\; \underbrace{3}_{***}(x-2)\left(x+\frac{1}{3}\right) \;=\; (x-2)(3x+1)$$

c) Si le $\Delta=b^2-4ac$ de la formule $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ n'est pas un carré parfait, il est inutile d'essayer : il n'y a pas de zéro rationnel ni de décomposition du trinôme en coefficients rationnels.