Géométrie vectorielle – 1M – Corrigé exercices complémentaires

N	*Données*	*Corrigé*
	Note : les calculs ci-dessous ont été faits vectoriellement (avec les lettres) le plus loin possible avant de les remplacer par les composantes, mais il est possible de remplacer les vecteurs exprimés en lettres par leurs composantes plus tôt dans le calcul.	
1	$A(3;4)$ $B(1;-2)$ $C(-4;0)$ $D(-1;6)$	a) $\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{ON}=\frac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{2}=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}-2,5\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}}{2}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{4}$ Résultat numérique : M(2; 1); N(–2,5; 3); P(–0,25; 2) b) On trouve le même résultat final en partant des milieux de BC et de AD. **Note** : On trouve encore le même résultat en partant des milieux de AC et BD, qui sont les diagonales de ce parallélogramme. C'est le centre de gravité de 4 points, qui a pour coordonnées la moyenne des coordonnées de ces 4 points. *Représentez vous-mêmes le graphique correspondant avec les coordonnées données vérifiez cette propriété sur le dessin.*
2	Mêmes données *Commentaire : on trouve aussi le centre de gravité des quatre points en prenant le centre de gravité de 3 des points, puis un centre de gravité en supposant qu'on a maintenant un poids de 3 sur le point G et un poids de 1 sur le quatrième point du quadrilatère.*	a) $\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}=\frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$ Coordonnées : $G\left(0;-\frac{2}{3}\right)$ b) Appelons Q le point cherché. On trouve le même que le point P calculé à la question précédente : $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OG}+\frac{1}{4}\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{OG}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OG}\right)=\frac{3\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OD}}{4}$ $\frac{\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)+\overrightarrow{OD}}{3}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{4}$
3	Mêmes données	On cherche le quatrième point *E* d'un parallélogramme *ABCE* On a $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}+\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right)=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$ $=\left[\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix} \rightarrow E(-2;6)$

4	$R(3;4;1)$ $S(1;-2;2)$	Comme $\overrightarrow{RS}$ est un cinquième de $\overrightarrow{AB}$ et est au milieu, on peut écrire $\overrightarrow{AR}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{RS}$; $\overrightarrow{SB}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{RS}$ $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{OR}-2\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{OR}-2(\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OR})=3\overrightarrow{OR}-2\overrightarrow{OS}$ $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{OS}+2\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{OS}+2(\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OR})=3\overrightarrow{OS}-2\overrightarrow{OR}$ $\overrightarrow{OA}=3\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\16\\-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OB}=3\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-14\\4\end{pmatrix}$ A(7;16;–1) C(–3;–14;4) Note : la première coordonnée de A indiquait par erreur –7 dans le corrigé publié précédemment
5	$A'(3;4;1)$ $B'(1;-2;0)$ $C'(-4;0;2)$	Les milieux des côtés déterminent 4 parallélogrammes : AB'A'C' – BC'B'A' – CA'C'B' On est ramené au même cas que la question 3. $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}-\overrightarrow{OA'}=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\0\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-6\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OA'}-\overrightarrow{OB'}=\begin{pmatrix}-4\\0\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\6\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}-\overrightarrow{OC'}=\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\2\\-1\end{pmatrix}$ A(–6;–6;1) – B(–2; 6; 3) – C(8; 2; –1)
6	$A(3;4;1)$ $B(1;-1;6)$ $C(-4;0;2)$ $D(1{,}2;7;-5)$ $E(-9{,}5;6{,}5;-9)$	Vecteurs colinéaires parmi $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{AE}$ $\overrightarrow{AD}$ $\overrightarrow{BD}$ $\overrightarrow{CE}$ $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-2\\-5\\5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-5\\1\\-4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AE}=\begin{pmatrix}-12{,}5\\2{,}5\\-10\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}-4\\3{,}5\\-6{,}5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BD}=\begin{pmatrix}-2\\-8{,}5\\-11{,}5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CE}=\begin{pmatrix}-5{,}5\\-6{,}5\\11\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires, car leurs composantes sont proportionnelles: $\overrightarrow{BC}=2{,}5\overrightarrow{AE}$ Ce sont les seules paires de vecteurs colinéaires parmi ces vecteurs
7	$\begin{pmatrix}2\\k\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}k-1\\6\end{pmatrix}$	On peut écrire la condition de colinéarité (proportionnalité des composantes) de plusieurs manières équivalentes : $\frac{2}{k}=\frac{k-1}{6}$ ou bien $2\cdot 6=k(k-1)$ ou encore $\underbrace{2\cdot 6-k(k-1)}_{\text{déterminant}}=0$ Cela donne l'équation $k^2-k-12=0$, qui a pour solutions 4 et -3

8	$A(3;4)$ $B(1;-2)$	Trouver P et Q tel que $\overrightarrow{AP} = 4\overrightarrow{AP}$; $\overrightarrow{AQ} = 3\overrightarrow{BQ}$ $\overrightarrow{AP} = 4\overrightarrow{AP}$ donne évidemment $\overrightarrow{AP} = \vec{0}$ donc P=A ... L'intention de l'exercice était de trouver P tel que $\overrightarrow{AP} = 4\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = 4\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)$ $OP = \overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} - 4\overrightarrow{OA} = 4\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OA}$ $= 4\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\20\end{pmatrix} \quad \to P(-5;20)$ De même, on aura $\overrightarrow{AQ} = 3\overrightarrow{BQ}$ $\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OA} = 3\left(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OB}\right) \to \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OA} = 3\overrightarrow{OQ} - 3\overrightarrow{OB} \to$ $2\overrightarrow{OQ} = 3\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \to \overrightarrow{OQ} = \dfrac{3\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}}{2} = \dfrac{1}{2}\left[3\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}$ Réponse: $Q(0;-5)$
9	$A(1;-1)$ $M(3;2)$	Trouver B sachant que M est situé sur le segment AB, au 2/5 de la distance de A à ~~M~~. B Si M est au 2/5 de la distance sur le segment AB, on a $\overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{5}AB$, donc $\overrightarrow{AB} = \dfrac{5}{2}\overrightarrow{AM}$ On peut alors écrire : $OB = OA + AB = OA + \dfrac{5}{2}AM$ $= \overrightarrow{OA} + \dfrac{5}{2}\left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}\right) = \dfrac{5}{2}\overrightarrow{OM} - \dfrac{3}{2}\overrightarrow{OA} = \dfrac{5\overrightarrow{OM} - 3\overrightarrow{OA}}{2}$ $= \dfrac{1}{2}\left[5\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}6\\6,5\end{pmatrix}$